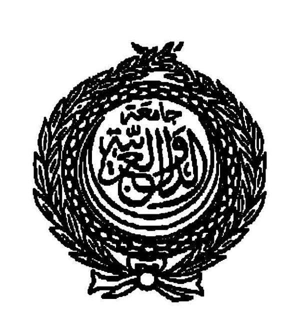


المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم

إدارة العلوم

الأعمال الرياضية لبهاء الدين العاملي

تحقيق وشرح وتحليل

الدكتور جلال شوقي

الأستاذ بكلية الهندسة

جامعة القاهرة

دار الشروق

١٩٨١

مقدمة

يرجع الفضل إلى العرب ـ بغير منازع ـ فى إرساء أصول وقواعد عِلْمَى الحساب والجبر ، وتعليمهما للعالم أجمع ، فالأرقام الشائعة الاستعمال فى عصرنا الحالى تُعرف بالأرقام العربية ، كذلك فإن كلمة «جبر» قد دخلت معظم اللغات الحية للدلالة على هذا العلم الذى وَضَعَ أولَ كتابٍ فيه عالِمُنا العربى الفذُّ محمد بن موسى الخوارزمى فى القرن التاسع للميلاد ، وهو أيضًا أول من كتب فى الحساب العربى ، وهذان الكتابان هما الأساس الذى شُيِّد عليه صرْحُ الرياضيات من بعده .

وقد زخرت الحضارة العربية بعشرات من علماء الرياضيات الذين قدموا للعالم عدة مئات من المؤلفات القيِّمة لا زالت الغالبية العظمى منها أسيرة خزانات المخطوطات ، هذا لما قُدِّر لها البقاء إلى وقتنا الحاضر . ومن المؤسف حقاً أن الكثير من المخطوطات العربية قد ضاع أو تلف عبر القرون بسبب الحروب والغزوات والمحن ، الأمر الذى جعل قضية تأْرِيخ العلوم الرياضية عند العرب أمْرًا ليس بالهين اليسير .

ولقد دار بخلدى أن أُقدِّم دراسة لأحد الرياضيين العرب ممن كانت له فرصة التجوال والاطلاع على الآثار العلمية لمن سبقه من علماء العرب. ومن ثمَّ فقد يكون من الممكن أن ننقل عنه صورة دقيقة لما وصلت إليه علوم الحساب والجبر والمقابلة وأعمال المساحة قرب نهاية الحضارة العربية التى امتدت زهاء ثمانية قرون . وبعد درس وتنقيب وتمحيص استقر رأيى على أن أقوم بتحقيق آثار الشيخ بهاء الدين العاملى فى الرياضيات ، فالشيخ من علماء النصف الثانى من القرن السادس عشر وأوائل القرن السابع عشر ، وقد عُرِفَ عنه شغفُه الشديد بالعلم ، وتعدُّدُ أسفاره التى استمرت ثلاثين عامًا ، جاب خلالها المنطقة الممتدة من مصر جنوبًا .وغربًا حتى أصفهان شمالاً

وشرقًا ، ولابد أن يكون الشيخ العاملى قد اطلع فى أسفاره هذه على كتب المتقدمين ، ومنها ما قد يكون ضل طريقه إلينا ، وقد وجدت أن العاملى قد ألّف كتابًا لخَّص فيه الحساب والجبر وأعمال المساحة على عصره ، وقدّم هذه المعلومات فى صورة مُرتَّبةٍ كل الترتيب واضحةٍ كل الوضوح ، وشاءت الصدفة الحسنة أن أعثر على ست مخطوطات لكتابه هذا المُسَمَّى : «خلاصة الحساب» فى مكتبات مدينة حلب الشهباء أثناء تواجدى بها أستاذًا مُعارًا لجامعتها ، فعقدت العزم على تحقيق هذا الكتاب للعاملى لاسيما وأنى لم أجد فى فهارس معهد المخطوطات العربية بالقاهرة ما يدل على وجود مخطوط أو مُصوَّر لهذا الكتاب ضمن مقتنياته .

هذا وقد تبين لى أثناء التحقيق أنّ الكتاب قد لخَّصَ ـ بعناية ودقة ـ الطرقَ الحسابية والجبرية المعروفة على عهده ، وأورد العديد من الأمثلة ، وبيَّن أنواع المعادلات وطرائق حلها ، كذا المسائل المستعصية الحل ، كما قدَّم عدَّة قواعد وفوائد لتسهيل أعمال الحاسب ، ونحن لم نعرض لهذا التحقيق ظنًّا منا أنّا نعرض لفضل العاملى فى الرياضيات ، وإنَّما نقدم الكتاب باعتباره عَرْضًا ـ فى المقام الأول ـ لعلوم الحساب والجبر والمساحة ومفاهيم العلماء العرب وطرائقهم فيها فى القرن الأخير من الحضارة العربية . بهذا المضمون أقبلنا على هذه المهمة مُفضِّلينها على أن نكتب من عندنا تاريخًا للعلوم الرياضية عند العرب ، وذلك حتى يتم تحقيق ونشر الجانب الأكبر من المخطوطات العربية فى هذا المجال ، فتكون كتابة التاريخ عن المصادر العربية الأصيلة لا عن آراء واجتهادات متفرقة من الشرق والغرب .

وقد وجدنا إتمامًا للفائدة أن نعرض بالدراسة للمسائل الحسابية والجبرية المتنوعة التى ساقها الشيخ بهاء الدين العاملى فى كتاب آخر له يُعرف بكتاب «الكشكول» ، ألّفه أثناء تواجده بمصر ، فقدمناها مشروحة وذلك بعد انتهاء تحقيقنا لكتاب «خلاصة فى الحساب والجبر والمقابلة» ، وكان بودنا أن نحصل على نسخة من مخطوط أشار إليه العاملى فى كتابه هذا وسمَّاه «بحر الحساب» ، وهو كتاب كان يؤلفه العاملى ويأمل أن يوفقه الله لإتمامه ، إلا أنه لا يبدو أن ذلك قد تحققّ له .

أرجو بهذه الدراسة العلمية أن أكون قد وُفِّقت فى تقديم صورة واضحة ـ على لسان أحد علمائنا المتأخرين ـ لمعارف العرب فى الحساب والجبر والمساحة قبل أن تأخذ أوربا بزمام المبادرة فى مجال الرياضيات .

والله ولى التوفيق ،

جلال شوق
كلية الهندسة ـ جامعة القاهرة

القاهرة فى ٢١ فبراير (شباط) ١٩٧٥.

المحتويـــــات

صفحة

بــهاء الدين العاملى[1]

(٩٥٣ ـ ١٠٣١ هـ) (١٥٤٧ ـ ١٦٢٢ م)

هو محمد بن حسين بن عبد الصمد المُلقَّب بهاء الدين الحارثى العاملى الجبعىّ الهمذانى ، وُلد ببعلبك[2] عند غروب شمس يوم الأربعاء لثلاثة عشر بقين من ذى الحجة سنة ثلاث وخمسين وتسعمائة ، وانتقل به أبوه إلى بلاد العجم ، حيث نهل من مناهل العلم ، ثم أخذ فى السياحة ، فتنقلت به الأسفار إلى أن وصل إلى أصفهان ، وجاب بلادًا كثيرة فدخل مصر ، ثم قدم القدس ولزم فناء المسجد الأقصى الشريف ، ثم أقلع إلى حلب قبل أن يرجع إلى أصفهان حيث كانت وفاته لاثنتى عشرة خلوْن من شوَّال سنة إحدى وثلاثين وألف ، ونقل إلى طوس حيث دُفن فيها بجوار «الإمام رضا» .

ولَقَبْ الحارثى نسبةٌ إلى حارث وهمذان قبيلة . أمَّا لَقَبْ العاملى فهو نسبةٌ إلى جبل عاملٍ أو بنى عاملة بالشام (حاليا بلبنان) .

تُنسب إلى الشيخ بهاء الدين العاملى مؤلفات كثيرة وجليلة ، منها التفسير المسمّى بالعروة الوثقى والصراط المستقيم ، والتفسير المُسمَّى بعين الحياة ، والتفسير المسمَّى بالحبل المتين فى مزايا القرآن المبين . ومشرق الشمسين وإكسير السعادتين ، وحاشية على أنوار التنزيل ، وتفسير وجيز ، ورسالة فى وحدة الوجود ، ومفتاح الفلاح ،

---

(١) عن ترجمة أوردها الشيخ أحمد بن على التهير بالمنينى (المتوفى سنة ١١٥١ هـ) فى صدر شرحه لقصيدة الشيخ بهاء الدين العاملى فى مدح صاحب الزمان السيد محمد المهدى ـ كتاب الكشكول للعاملى ـ طبعة المطبعة العامرة الشرفية .(مطبعة الشيخ شرف موسى) بخان أبى طاقية بمصر سنة ١٣٠٢ هـ (١٨٨٥ م) . الصفحات ٣٦٧ حتى ٣٧٠ . كذا كتاب «تاريخ الأدب العربى» لكارل بروكلمن . طبعة ليدن سنة ١٩٤٣ .

(٢) يقول ابن معصوم بولادته ببعلبك . بينما ينص الطالوى على ولادته بقزوين .

وزبدة الأصول ، وأربعون حديثًا ، ودراية الحديث أو الرسالة الوجيزة ، والجامع العباسي (فارسي) ، والحديقة الهلالية ، والرسالة الاثنا عَشرية ، وهداية الأمة إلى أحكام الأئـمة ، وحديقة السالكين ، وله فى مجال اللغة والأدب الفوائد الصمدية فى علم العربية ، وأسرار البلاغة ، وتهذيب النحو ، والمخلاة ، والكشكول ، وبعض القصائد ، ومنظومة فى الموعظة ، وتهذيب البيان ، ومنظومة وسيلة الفوز ، وتوضيح المقاصد فى شرح القصيدة الذهبية .

لقد تعدَّت مُصنَّفاتُ عالِمنا الموسوعى الشيخ بهاء الدين العاملى الـخمسين مُصنَّفًا ما بين كتاب ورسالة ومقال ، ولم يقتصر نشاطه الفكرى على علوم الدين والأدب واللغة ، وإنَّما تعدَّى ذلك إلى مجال العلوم حيث نجد له مؤلفات قيمة فى الرياضيات والفلك منها :

١ ـ خلاصة الحساب (المُسمّى البهائية) .

٢ ـ بحر الحساب (وهو كتاب أشار إليه العاملى فى عدَّة مواضع من «خلاصة الحساب» ، ووصفه بكتابه الكبير ، وتمنَّى أن يُتمَّه بعون الله وتوفيقه ، ويبدو أن هذه الأمنية لم تتحقق له) .

٣ ـ رسالة فى الجبر والمقابلة .

٤ ـ تشريح الأفلاك .

٥ ـ الرسالة الحاتمية فى الأسطرلاب .

٦ ـ رسالة الصفيحة (أو الصفحة) . (عن الأسطرلاب)

٧ ـ رسالة «جِهاتُمَا» . (عن الأسطرلاب)

٨ ـ رسالة فى تحقيق جهة القِبْلة .

٩ ـ المُلخَّص فى الهيئة .

١٠ ـ رسالة كُريَّة . (عن الكرة)

نتناول هنا بالدراسة ـ من كتب العاملى ـ كتاب «خلاصة الحساب» ، فنقدم تحقيقًا لفظيًّا وعلميًّا له ، مع شروح وتحليلات رياضية لما احتواه هذا الكتاب من حساب وجبر ومقابلة ومساحة ، مُستعينين فى ذلك بالمخطوطات الستَّة الموجودة بمدينة حلب الشهباء ، كما أننا رجعنا إلى كتاب العاملى المسمَّى «الكشكول» لدراسة ما جاء فيه من قواعد ومسائل متفرقة فى الرياضيات .

تعريـف بالكتـــاب

كتاب يبحث فى تراث العرب فى الرياضيات ، فيقدم دراسة علمية لكتابات الشيخ بهاء الدين العاملى فى كتابه «خلاصة الحساب والجبر والمقابلة» ويعرض لرياضياته فى كتابه «الكشكول» ، ويشرحها شرحًا وافيًا مدعمًا بالتحليل الرياضى الشامل .

ويمتاز الشيخ العاملى ـ العالم الموسوعى العربى ـ بأنه قد رسم صورة واضحة وصادقة لمعارف العرب الرياضية فى نهاية القرن السادس عشر الميلادى بعد أن جاب الأمصار العربية والإسلامية واطّلع على أعمال العرب وفلاسفتهم زهاء ثلاثين عامًا .

ويوجد من كتاب العاملى «خلاصة الحساب» أكثر من أربعين مخطوطًا منتشرة فى أرجاء العالم شرقيه وغربيه ـ كما يوجد له ثلاثة عشر شرحًا ، وقد تم تحقيق الكتاب من واقع ستة مخطوطات موجودة بمكتبات مدينة حلب الشهباء لم يرد ذكرها فى كتب المخطوطات المختصة ، ولم يكن قد سبق نشر هذا الكتاب فى العالم العربى .

يبدأ الشيخ العاملى ببيان طرائق الحساب الأساسية من جمع وتفريق وضرب وقسمة واستخراج للجذور سواء بالنسبة للأعداد الصحيحة أو للكسور ، كذا كيفية التحقق من سلامة أدائها بتطبيق قاعدة «ميزان العدد» ، تلك القاعدة التى أطلق عليها الغرب تسمية «القاعدة الذهبية» ، ويعرج العاملى بعد ذلك إلى استخراج المجهولات بطريق الأربعة المتناسبة ، كذا بطريق حساب الخطأين ثم بطريق العمل بالعكس ، وقد عرض العاملى فى مجال الحساب لكيفية استخراج المضمرات عن طريق تكوين معادلة بسيطة ذات مجهول واحد ، كذلك لفكرة التباديل والتوافيق كإيجاد عدد الكلمات التى تتركب من حروف المعجم بشروط خاصة ، وأخيرًا قدم العاملى طريقة قسمة مال على جماعة من المستحقين تزيد استحقاقاتهم على المال الموجود .

ويبحث الشيخ العاملى فى خواص الأعداد ، ويعرف الأعداد التامة والمتحابة والمتوافقة والمتداخلة وغيرها ، ويقدم قاعدة مبتكرة لتعيين الأعداد التامة ثبتت صحتها حتى البلايين ، وأمكن باستخدامها تعيين الأعداد التامة السبعة الأولى .

ويعرض العاملى لجمع المتواليات الرياضية ، فيبين كيفية جمع الأعداد على النظم الطبيعى (وهو ما نسميه اليوم بالمتوالية الحسابية) . وجمع الأفراد دون الأزواج وعكسه ، كذا جمع المربعات المتوالية وجمع المكعبات المتوالية .

أما فى مجال الجبر والمقابلة فإن العاملى يعرف الشىء والمال والمكعب ومراتبها ، أى المقدار المجهول ومربعه ومكعبه وما فوق ذلك على التوالى . ويشرح المسائل الجبرية الست ، ويقدم حلول معادلة الدرجة الثانية ، كذلك يبين العاملى تحويل الفرق بين مربعى مقدارين إلى حاصل ضرب مجموع المقدارين فى الفرق بينهما ، كما يعرض «للمسائل السيالة» وهى تسمية أطلقها العرب على المسائل التى يصحُّ لها عدد غير محدود من الإجابات الصحيحة .

ويسوق العاملى بابًا خاصًّا لتعيين مساحات الأشكال الهندسية المستوية وحجوم الأجسام المنتظمة ، ويتناول بيان أعمال المساحة العملية وتقديم البراهين الهندسية على صحة الطرق المتبعة فيها ، فيعرض لطرق قياس فرق المنسوب بغرض شق القنوات . وطرق تعيين علو المرتفعات وأعماق الآبار ، كذا قياس ارتفاع الشمس دون أسطرلاب أو آلة ارتفاع .

ويفرد الشيخ العاملى خاتمة كتابه لسبع مسائل يسميها «المستصعبات السبع» وهى مسائل بعضها صعب وبعضها الآخر مستحيل الحل . فمنها مستصعبات تشتمل على معادلات جبرية من الدرجتين الثالثة والرابعة ، ومنها مسألتان مستحيلتا الحل كمسألتى تقسيم ضعف المربع إلى مربعين وتقسيم المكعب إلى مكعبين بشرط كون المقادير كلها أعداد صحيحة . وقد عرفت هاتان المستصعبتان فيما بعد بنظرية «فيرما» نسبة إلى العالم الفرنسى بيير دى فيرما الذى عاش فى القرن السابع عشر وذلك يثبت سبق وقوف العرب على هذه النظرية الشهيرة .

إن العاملى يقدم لنا عرضًا شاملاً تمام الشمول ، مرتبًا غاية الترتيب ، ودقيقًا كل الدقة لما ألم به العرب وأحاطوا فى مجال الرياضيات وأعمال المساحة وهو عرض غنى بفضل العرب وسبقهم فى هذا المجال . قبل أن تنتقل الصدارة فى التقدم الحضارى من الشرق إلى الغرب .

جلال شوقى

القسم الأول

كتاب
"الخلاصة في علم الحساب والجبر والمقابلة"
أو "خلاصة الحساب"

للشيخ بهاء الدين محمد بن حسين العاملي

مخطوطات كتاب «خلاصة الحساب» (البهائية)
لبهاء الدين العاملى

تحتفظ خزانات الكتب فى العالم ـ شرقيِّهِ وغربيِّهِ ـ بالعديد من مخطوطات هذا الكتاب القيِّم ، حيث يوجد أكثر من أربعين مخطوطًا منه ، فضلاً عن شروحه التى تعدَّت العشرين مخطوطًا ، وقد طُبع الكتاب ثلاث مرات . كما صدرت له ثلاث ترجمات إلى اللغات الفارسية والألمانية والفرنسية ، بيْد أنه لم يُنشر فى العالم العربى قبل اليوم . ويدلُّ العدد الضخم من النسخ الخطيَّة لهذا الكتاب على أهميته وسعة انتشاره وبالتالى كثرة الأخذ عنه . حيث إنه يقدم صورةً متكاملةً ومُرَتَّبَةً لحالة المعارف الرياضيَّة عند العرب فى أواخر القرن السادس عشر الميلادى ، وتشهد الشروح العديدة للكتاب على عِظَم الاهتمام به ، ونبين فيما يلى أهم مخطوطات الكتاب وشروحه الموجودة فى خزانات الكتب العامة فى العالم .

● **المخطوطات الموجودة فى الوطن العربى**

١ ـ مخطوط المكتبة الخالدية بالقدس.

٢ ـ مخطوطات الموصل (عن كتاب «مختارات الموصل» لداود الجلبى الموصلى ، بغداد عام ١٩٢٧ م) ـ أرقام : ١٠٤/٢٩ ، ٢١٦/٦٩ ، ٦٠/١٠٣ ، ٦/١١٥/١٠٨ ، ٢٧١/١٣٧ ، ٢٠٥/١٦١ ، ١/١٤٠/١٧٩ ، ٢١٢ ، ٦/٦٩ ، ٧٣ ، ٢٤٩/٢٤١ ، ٢٨٧/٢٤٢ ، ١/١٥٠/٢٧٤ ، ٢/١٦/٢٨٨ .

٣ ـ مخطوطا مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب ـ رقم ٩١٢ ، ١٧٧٣.

٤ ـ مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب ـ رقم ١٢٥٣ .

٥ ـ مخطوط المكتبة المولوية بحلب ـ رقم ٧٥٣ .

٦ ـ مخطوطا مكتبة مدرسة الشيخ أحمد الصديق بحلب ـ رقم ٦٦ ، ١٥٩ .

٧ ـ مخطوطا دار الكتب المصرية بالقاهرة : فهرست الكتب العربية المحفوظة بالكتبخانة الخديوية المصرية ـ المجلد الخامس ، رقم ١٨٠ ـ المجلد السابع ، رقم ٨٩ .

٨ ـ مخطوط الخزانة الآلوسية ـ مكتبة المتحف العراقى ببغداد ـ رقم ٨٧٩٢.

- **المخطوطات الموجودة فى آسيا وتركيا**

١ ـ مخطوطات المجلس الوطنى بطهران ـ رقم ٢/٣٩٨ ، ١٢٧٥ ، ١٣١٩ .
٢ ـ مخطوط مكتبة المشهد ـ رقم ٤/٥١/١٨/١٧ .
٣ ـ مخطوط مكتبة تبريز ـ رقم ١٢٧٦ .
٤ ـ مخطوط مكتبة أصفهان ـ رقم ٦٩/٧٩٦/١ .
٥ ـ مخطوط مكتبة كييف ـ رقم ٩٣ .
٦ ـ مخطوط مكتبة الجامعة الإسلامية ـ عليجره ـ رقم ٢/١٢٠ .
٧ ـ مخطوط مكتبة بشاور ـ رقم ١٧٤٧ .
٨ ـ مخطوط المكتبة العامة ـ رامبور ـ رقم ٢٨١/٤١٣ ب .
٩ ـ مخطوط مكتبة بوهار ـ رقم ٣٥٢ . (طُبع فى كلكتا عام ١٨١٢ م) .
١٠ ـ مخطوط المكتبة الشرقية العامة ـ بنكيبور ـ رقم ٢١٩ .
١١ ـ مخطوط مكتبة حاجى سليم أغا باستانبول ـ رقم ٧٢٩ ، كذا مجموع ١٢٧٦ .

- **المخطوطات الموجودة فى أوربا وأمريكا**

١ ـ مخطوط المتحف البريطانى بلندن ـ رقم ٢/١٣٤٥ .
٢ ـ مخطوط المكتب الهندى بلندن ـ رقم ٧٥٨ .
٣ ـ مخطوط مكتبة جامعة كامبردج ـ ملحق براون رقم ٤٣٧ .
٤ ـ مخطوط المكتبة الملكية ببرلين الغربية ـ كتالوج ألواردت رقم ٥٩٩٨ .
٥ ـ مخطوط مكتبة جوتنجن بألمانيا الغربية ـ رقم ٦٨ .
٦ ـ مخطوط مكتبة الفاتيكان ـ رقم : روسيانى ١٠١٣ .
٧ ـ مخطوط جامعة برنستون بأمريكا ـ رقم ١٦٣ .
٨ ـ مخطوطات المكتبة العامة ببطرسبرج (لينينجراد) : كتالوج عام ١٨٥٢ م ـ رقم ٢٤٣ ، كتالوج روزن ـ رقم ٥/١٩٢٦ ب ، كتالوج كراتشكوفسكى ـ رقم ٩٢٩ ، كتالوج مجموعة بخارى ـ رقم ٤١٩ .

• شـروح الكتاب

١ ـ بهاء الدين العاملى (المُصنِّف نفسه) : شرح الباب الثامن ، مخطوط المتحف البريطانى بلندن ـ رقم : ملحق ٧/٧٦٥ .

٢ ـ عصمت الله بن أعظم بن عبد الرسول سَهارنبورى : (أتم الشرح حوالى عام ١٠٨٦ هـ = ١٦٧٥ م) .

مخطوط المكتب الهندى بلندن ـ رقم ٦٠/٧٥٩ .

مخطوط مكتبة الجامعة الإسلامية بعليجره ـ رقم ١/١٢٠ .

مخطوط المكتبة العامة برامبور ـ رقم ٥٠/٤١٦/١ .

طُبع الشرح فى كلكتا بالهند عام ١٨٢٩ م .

٣ ـ رمضان بن حُرَيْرة الجزائرى القادرى :

أتمَّ شرحه عام ١٠٩٢ هـ (١٦٨١ م) .

مخطوط دار الكتب المصرية بالقاهرة : فهرست الكتب العربية المحفوظة بالكتبخانة الخديوية المصرية ، المجلد السادس ـ رقم ١٨٠ .

مخطوط المكتبة الشرقية لجامعة القديس يوسف ببيروت ـ رقم ٢٤٠ .

مخطوط مكتبة سليم أغا باستانبول ـ رقم ٧٣٤ .

مخطوطا مكتبة بشاور ـ رقم ١٦٩٤ ، ١٧٣٥ .

مخطوط المكتبة العامة برامبور ـ رقم ٩/٢٨/٤٢٧/١ .

مخطوط المكتبة العامة ببطرسبرج (لينينجراد) ـ كتالوج كراتشكوفسكى رقم ٩٢٩ .

٤ ـ حاجى حسين :

مخطوط المكتب الهندى بلندن ـ رقم ٧٦٢ .

٥ ـ شمس الدين على الخلخالى :

مخطوط المكتب الهندى بلندن ـ رقم ٧٦٣ .

مخطوط مكتبة جون ريلاندز بمانشستر ـ رقم ٣٥٥.

مخطوط مكتبة بشاور ـ رقم ١٧٦٦ .

مخطوط مكتبة م . حسين ـ حيدر آباد (مجلة الجمعية الأسيوية الملكية ـ عام ١٩١٧ ـ العدد ٢٢٥ ـ صفحة ١٠٩) .

٦ ـ جواد بن سعد بن جواد :

مخطوط المتحف البريطانى بلندن ـ رقم : شرقيات ٦٢٨٠ .

مخطوط المكتبة العامة ببطرسبرج (لينينجراد) ـ كتالوج مجموعة بخارى رقم ٤٢٠ .

مطبوع بالمجلس الوطنى بطهران ـ رقم ١٢٧٣ .

٧ ـ عمر بن أحمد المائى الشِّلِّى :

مخطوط مكتبة جامعة ليبزج ـ رقم ٨/٨٨٣ .

مخطوط المكتبة العامة بميونيخ ـ مجموعة جلازر رقم ٨٥١ .

المكتبة الملكية ببرلين الغربية ـ كتالوج ألواردت رقم ٥٣٠١ .

مخطوط مكتبة قَوَله بتركيا ـ رقم ٢/٢٦٤ .

٨ ـ ميرحسين المَيْبُدى اليَزْدى :

مخطوط مكتبة المشهد ـ رقم ١٧/٤٠/١٢٤ .

٩ ـ لطف الله المهندس اللاهورى :

مخطوط المكتبة العامة ـ رامبور ـ رقم ١/٤١٦/٧٥ .

١٠ ـ شمس الدين على الحَسَنى :

مخطوط المكتبة العامة ـ رامبور ـ رقم ١/٤٦ .

١١ ـ عبد الباسط بن رُسْتم أحمد بن على أصغر القَنُّوجى :

مخطوط المكتبة العامة ـ رامبور ـ رقم ١/٤٧ .

١٢ ـ سليمان بن أبى الفتح كشميرى :

كتاب « اللُّباب » .

١٣ ـ عبد الرحمن بن أبى بكر المَرْعشى :

مخطوط مكتبة قَوَلَه ـ رقم ٢/٢٦٤ .

١٤ ـ رمضان بن أبى هريره الجزرى القادرى :

« حلُّ الخلاصة لأهل الرياسة »

مخطوط الخزانة الآلوسية ـ مكتبة المتحف العراقى ببغداد ـ رقم ٨٥٥٨ .

● الكتب المطبوعة :

١ ـ طبعة استانبول ـ ليتو جُلستان ، عام ١٢٦٨ هـ .
٢ ـ طبعة كشمير ، عام ١٢٨٥ هـ ، عام ١٢٩٩ هـ .
٣ ـ طبعة كلكتا بالهند (مع شروح) ، عام ١٨١٢ م .

● ترجمات الكتاب :

١ - ترجمة فارسية بالمتحف البريطانى بلندن : المجموعة الفارسية ٢ ، رقم ٤٥٠ أ .
٢ ـ ترجمة ألمانية بقلم نِسِلْمَان ببرلين عام ١٨٤٣ م .
Nesselmann : "Essenz der Rechenkunst", Berlin, 1843.
٣ ـ ترجمة فرنسية بقلم المستشرق أ . مايرّ بباريس عام ١٨٤٦ م .

● مخطوطات مكتبات حلب

تتوفر فى مكتبات حلب ستُّ مخطوطات لكتاب «خلاصة الحساب» نبينها فيما يلى :

١ ـ «الخلاصة فى علم الحساب والجبر والمقابلة»
مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية ـ رقم ١٧٧٣ .
ويقع فى ٥٥ صفحة ـ مقاس : ٢٠,٥ × ١٥,٥ سم .
(راجع الأشكال ١ ـ ٣ ، ٧ ـ ١٠) .

٢ ـ «خلاصة الحساب»
مخطوط المكتبة المولوية ـ رقم ٧٥٣ .
ويقع متن الكتاب فى ٦٣ صفحة ، ثم يلى ذلك شروح له حتى صفحة ٧١ ـ
مقاس المخطوط : ٢١ × ١٥ سم .
(راجع شكل ٤) .

٣ ـ «خلاصة الحساب»
مخطوط المكتبة الأحمدية ـ رقم ١٢٥٣ .
ويقع فى ٥٥ صفحة ـ قطع ربع : ٢١ × ١٦ سم .

فُرِغَ من نَسْخه سنة ١٠٩٠ هـ .
(رَاجع الأشكال ٥ ، ٦ ، ١٦ ، ١٨) .

٤ ـ «خلاصة فى علم الحساب»
مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية ـ رقم ٩١٢ .
نَسخهُ حسن بن جمال الدين الحلبى الديركوشى سنة ١٠٨٦ هـ .
مقاس المخطوط ٢١ × ١٦ سم .

٥ ـ «خلاصة الحساب»
مخطوط مكتبة مدرسة الشيخ أحمد الصديق ـ رقم ١٥٩ .
ويشتمل على شرح حسين بن غياث الدين منصور اليزدى .
فُرِغَ من نسْخِه سنة ١١١٧ هـ ـ مقاس المخطوط : ٢٠ × ١٣ سم .

٦ ـ «خلاصة الحساب»
مخطوط مكتبة مدرسة الشيخ أحمد الصديق ـ رقم ٦٦ .
نَسخهُ محمد سليمان الريحاوى سنة ١١٣٢ هـ ـ مقاس المخطوط : ٢٠ × ١٥ سم .

هذا ولمَّا كانت المخطوطات الثلاث الأولى هى أوضح هذه النسخ وأجودها وأكملها ، فقد تمَّ تحقيق هذا الكتاب من واقعها مع مقابلة هذه النسخ الثلاث مع بعضها البعض وإثبات أهم الفروق بينها فى الحاشية ، مستعملين فى التحقيق علامات الترقيم والرسم العصرى للحروف ، وذلك حتى يكون النصُّ واضحًا كلَّ الوضوح لقارئ اليوم .

هذا كتاب الخلاصة في علم الحساب والجبر والمقابلة

تأليف العالم العلامة والحبر الفهامة

الشيخ بها الدين رحمه الله

تعالى امين

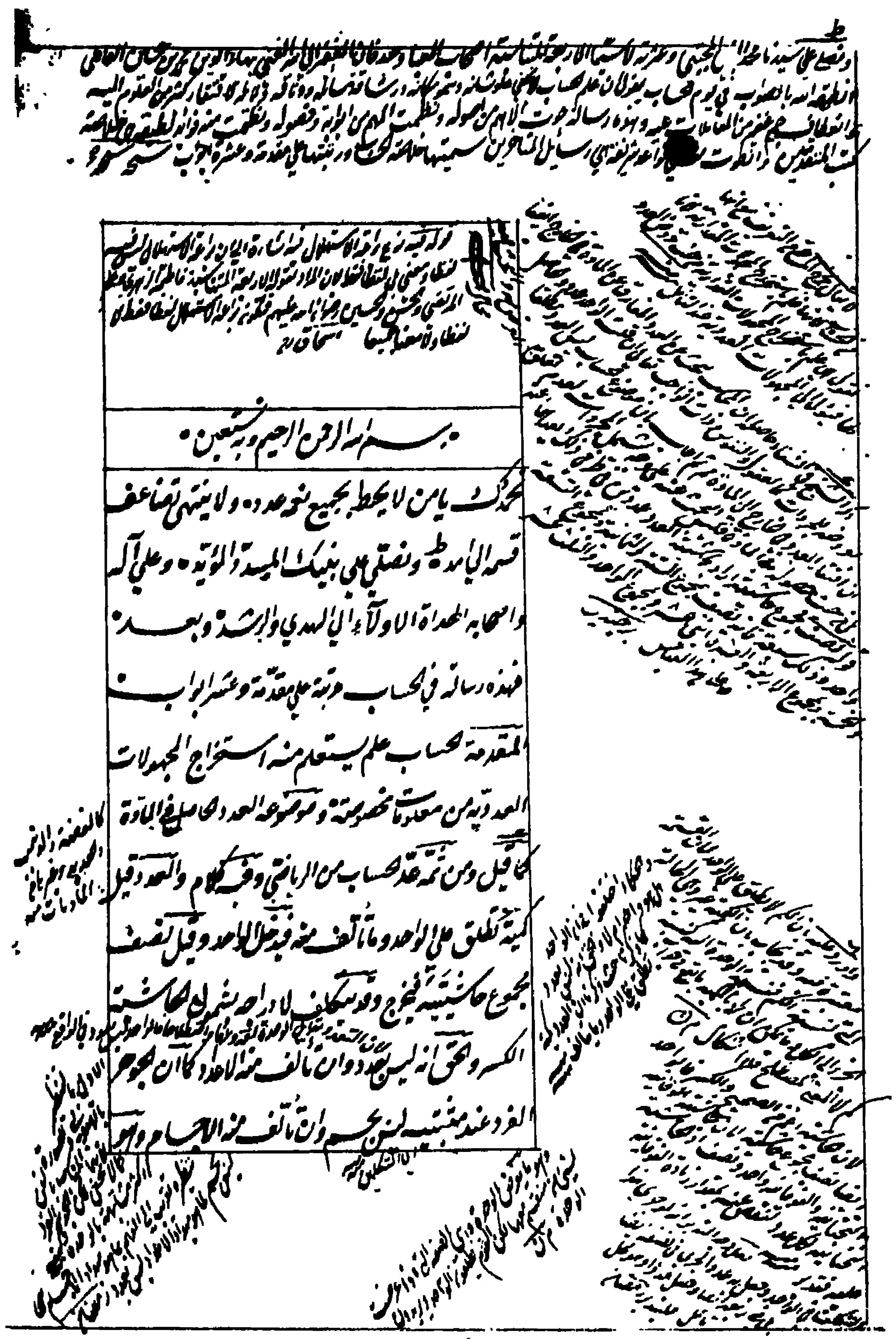
من الكتب الذي اوقفها سيافزاده

محمود ابن احمد جزار ابن عبد الرحمن

في جامع كبهيا موى حلب

شكل (١)

الصفحة الأولى من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب ـ رقم ١٧٧٣



بسم الله الرحمن الرحيم وبه نستعين

نحمدك يا من لا يحيط بجميع نعم عدده ولا ينتهي تضاعف
قسمه الى مد طه ونصلي على نبيك المسدد المؤيد وعلى آله
واصحابه الهداة الاولا الى الهدى والرشد وبعد
فهذه رسالة في الحساب مرتبة على مقدمة وعشرة ابواب
المقدمة الحساب علم يستعلم منه استخراج المجهولات
العددية من معلومات مخصوصة وموضوعه العدد الحاصل في المادة
كما قيل ومن ثمه عد الحساب من الرياضي وفيه كلام والعدد قيل
كمية تطلق على الواحد وما تألف منه فيدخل الواحد وقيل نصف
مجموع حاشيتيه فيخرج وقد يتكلف لادراجه بشمول الحاشية
الكسر والحق انه ليس بعدد وان تألف منه الاعداد كان الجوهر
الفرد عند مثبتيه ليس بجسم وان تألف منه الاجسام

شكل (٢)

الصفحة الثانية من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب ـ رقم ١٧٧٣

في هذا الفن مسائل عرفوا في حلها افكارهم وتوجهوا الى استخراجها
انظارهم وتوصلوا الى كشف نقابها بكل حيلة وتوسلوا
الى رفع حجابها بكل وسيلة فما استطاعوا اليها سبيلا وما وجدوا
عليها مرشدا ودليلا فهي باقية على عدم الانحلال من قديم الزمان
مستصعبة على سائر الاذهان الى هذا الآن وقد ذكر علماء هذا
الفن بعضها في مصنفاتهم واوردوا اسطرا منها في مؤلفاتهم
تحقيقا لاشتمال هذا الفن على المستصعبات لا بيانا وإفحاما
لمن يدعي بعدم العجز في حسابيات وتحذيرا للحاسبين من التزام الجواب
عما يورد عليهم منها وحثا لاصحاب الطبائع الوقادة على حلها
والكشف عنها وانا اوردت في هذه الرسالة سبعة منها على سبيل
الانموذج اقتداء بآثارهم واقتفاء لآثارهم وهي هذه الاول
عشرة مقسومة بقسمين اذا زيد على جذره وضرب المجتمع في المجتمع
حصل عدد مفروض الثاني مجذورات زدنا عليه عشرة كان للمجتمع
جذر واذا نقصنا منه كان للباقي جذر الثالث قد زيد بعشرة
لا جذر ما العدد ولعدد بخمسة لا جذر ما الرابع عدد مكعب

مكعب قسم بقسمين مكعبين الخامس عشرة مقسومة بقسمين
اذا قسمنا كلا منهما على الآخر وجمعنا الخارجين كان المجتمع
مساويا لاحد قسمي العشرة السادس ثلث مربعات متناسبة
مجموعها مربع السابع مجذور اذا زيد عليه جذره درهمان ونقص
منه جذره ودرهمان كان للمجتمع والباقي جذر هذا واعلم
ايها الاخ العزيز الطالب لنفائس المطالب اني قد اوردت
لك في هذه الرسالة الوجيزة بل الجواهر العزيزة من نفائس
عرائس قوانين الحساب ما لم يجتمع الى الآن في رسالة وكتاب
فاعرف قدرها ولا ترخص مهرها وامنعها عمن ليس هو اهلها
ولا تزفها الى حريص على ان يكون بعلها ولا تبذلها لكثيف
الطبع من الطلاب لئلا تكون معلقة للدرة في اعناق الكلاب
فان اكثر من طالبها حري بالصيانة والكتمان حقيق بالاستتار
عن اكثر اهل الزمان فاحفظ وصيتي اليك والله حافظ عليك

تمت الرسالة اللطيفة بتوفيق الله
والا رتبة الشريفة وصلى الله على
سيدنا محمد وعلى آله وصحبه
وسلم

شكل (٣)

الصفحة الأخيرة من خاتمة مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب ـ رقم ١٧٧٣

بسم الله الرحمن الرحيم

نحمدك يا من لا يحيط بجميع نعمه عدد ولا ينتهي نقضا عدد قسمه الى الاماد
ونصلي على نبيك المسدد والمؤيد وعلى آله واصحابه الهداة الادلاء
على الهدى والرشد اما بعد فهذه رسالة في الحساب نحو جزئية
على مقدمة وعشرة ابواب مقدمة الحساب

بسم الله الرحمن الرحيم

نحمدك يا من لا يحيط بجميع نعمه عدد ولا ينتهي تعداد عدد
قسمه الى امد ونصلي على سيدنا محمد النبي المجتبى وعترته
سيما الاربعة المتناسبة اصحاب العبادة اما بعد فان الفقير
الى الله الغني بهاء الدين محمد بن الحسين العاملي انطقه الله
بالحسنى في يوم الحساب يقول ان علم الحساب لا يخفى علو شأنه
وسمو مكانه ورشاقة مسائله ووثاقة دلائله لافتقار
كثير من العلوم اليه وانعطاف جم غفير من المعاملات عليه
وهذه رسالة حوت الاهم من اصوله ونظمت المهم من
ابوابه وفصوله وتضمنت منه فوائد لطيفة هي خلاصة كتب
المتقدمين وانطوت منه على قواعد شريفة هي زبدة رسائل
المتأخرين سميتها خلاصة الحساب ورتبتها على مقدمة وعشرة ابواب

المقدمة الحساب علم يستعلم منه استخراج المجهولات العددية

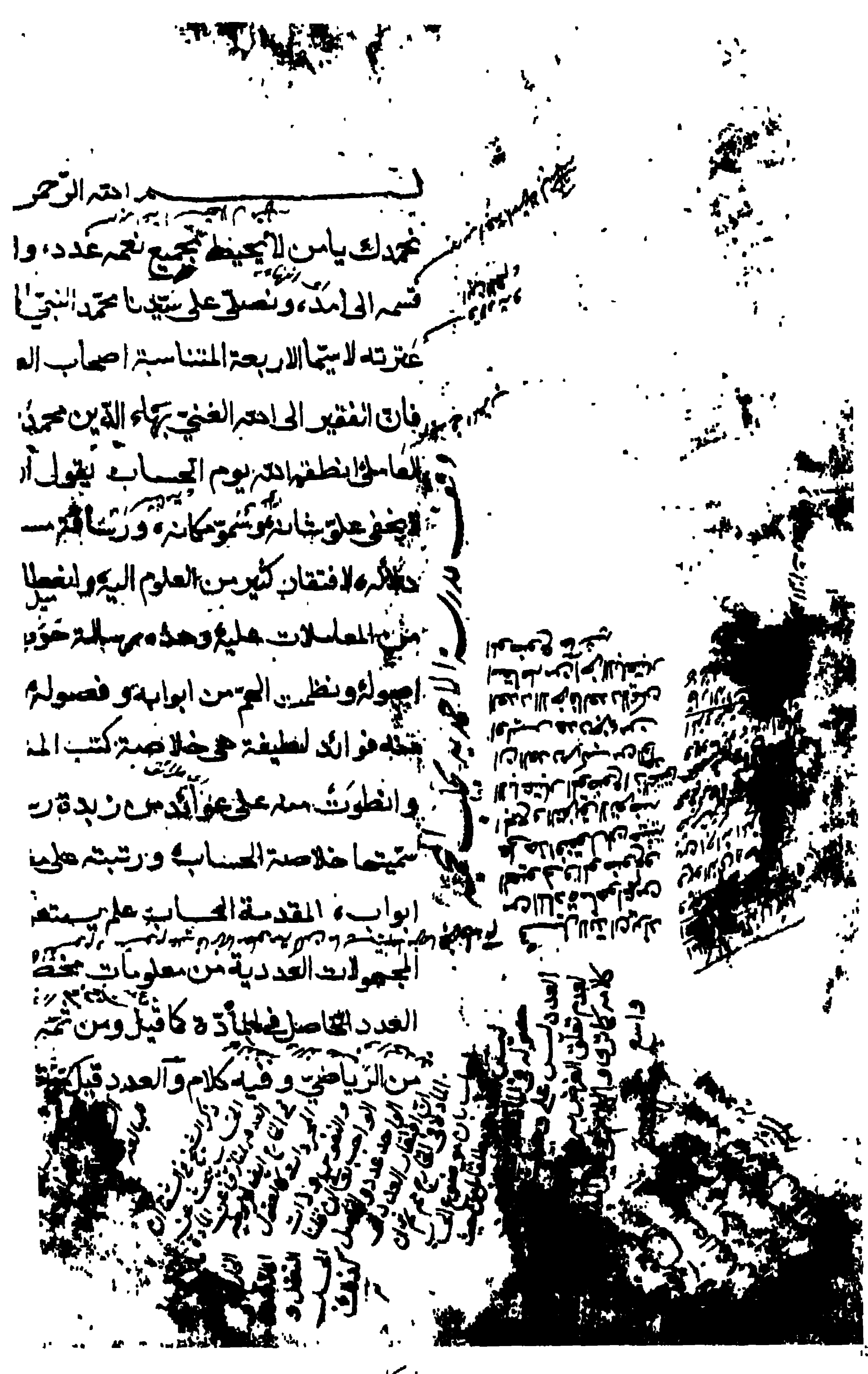
من

فاقسمه على الثلاثة يخرج ستة وثمانون دينارا وثلث
وهو لزيد وعلى الاثنين يخرج تسعة وعشرون وسبعا دينار
ونصف وهو لعمرو وعلى العشرة يخرج خمسة وعشرون دينارا
وتسعة اعشار وهو لبكر وعلى الخمسة عشر يخرج سبعة عشر
دينارا وخمس وثلث خمس دينار وهو عائد وان كان
كسر فاضرب الخارج في عدة المكرر ليحصل المطلوب كما
اذا اوصى في المثال لزيد بتسعين وهو ثلاثة اعشار
ولبكر باربعين وهو ثلثا خمس فتضرب خمسة وعشرين
وتسعة اعشار في الثلاثة يحصل سبعة وسبعون دينارا
وسبعة اعشار دينار وتضرب سبعة عشر وخمسا
وثلث خمس في الاثنين يحصل اربعة وثلاثون
وثلث خمس وبما مر من القواعد يسهل الامر في نصف
وهذا الاخير يعم الثلاثة وهو والاول مما تفرد به
الرسالة وللديوانيين من اهل الرقوم طريق آخر يبنى
على سطر الموجود المنة لله تعالى وتقدس

٤٢

شكل (٤)

الصفحتان الأولى والأخيرة من مخطوط المكتبة المولوية بحلب ـ رقم ٧٥٣


بسم الله الرحمن

نحمدك يا من لا يحيط بجميع نعمه عدد، وا

قسمه الى امد، ونصلى على سيدنا محمد النبي ا

عترته لا سيما الاربعة المتناسبة اصحاب الـ

فان الفقير الى الله الغني بهاء الدين محمد

العاملي لطف الله به يوم الحساب يقول ان

لا يخفى على شانه وسمو مكانه ورشاقة

لافتقار كثير من العلوم اليه ولانحطا

من المعاملات عليه وهذه رسالة حوت

اصوله ونظمت المهم من ابوابه و فصوله

فوائد لطيفة هي خلاصة كتب المـ

وانطوت منه على عوائد من زبدة

سميتها خلاصة الحساب ورتبتها على

ابواب، المقدمة الحساب علم يستعمل

المجهولات العددية من معلومات مخصوصة

العدد الحاصل في المادة كما قيل ومن ثم

من الرياضي وفيه كلام والعدد قيل

شكل (٥)

الصفحة الأولى من مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب – رقم ١٢٥٣

سبيل الاعوزج اقتداء بآثارهم واقتفاء آثارهم الا عشرة [illegible]
بقسمين اذا زيد على كل جذره وضرب المجتمع في المجتمع حصل عدد
مفروض والثاني مجذور ان زدنا عليه عشرة كان المجتمع جذرا او
نقصناها منه كان الباقي جذرا والثالث اقل يزيد بعشرة الاجذار ما
لعمرو ولعمرو بخمسة الاجذار ما لزيد والرابع عدد مكعب يقسم بقسمين
اذا قسمنا كلا منهما على الآخر وجمعنا الخارجين كان المجتمع مساويا
لاحد قسمي العشرة والسادس ثلثة مربعات متناسبة مجموعها مربع
والسابع اذا زيد عليه جذره ودرهمان او نقص منه جذره ودرهمان
كان المجتمع او الباقي جذرا واعلم ايها الاخ العزيز الطالب لنفايس
المطالب اني قد اوردت لك في هذه الرسالة الوجيزة بل الجوهرة
العزيزة من نفايس عرايس قوانين الحساب ما لم يجتمع الى الآن
في رسالة ولا كتاب فاعرف قدرها وترخص مهرها وامنعها عن
ليس اهلها ولا تزفنها الا على حريص على ان يكون بعلها والتبذها
كثيف الطبع من الطلاب لئلا يكون معلقا للدرة اعناق الكلاب
فان اكثر من مطالبها حري بالصيانة والكتمان حقيق بالاستتار
عن اكثر هذا الزمان فاحفظ
وصيتي اليك والله
حفيظ عليم
تمت الرسالة
بعون الله

شكل (٦)

الصفحة (٥١) من مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب ـ رقم ١٢٥٣

محتويـات الكتـــاب

«الخلاصة فى علم الحساب والجبر والمقابلة»

أو «خلاصة الحساب»

صفحة

صفحة

متن مخطوط

"الخلاصة فى علم الحساب والجبر والمقابلة"

لبهاء الدين العاملى

وبهامشه الشرح والتحليل العلمى لمضمونه

بسم الله الرحمن الرحيم

نحمدك يا مَنْ لا يحيطُ بجميع نِعَمِه عددٌ ، ولا ينتهى تضاعف قسمه إلى أَمَدٍ ، ونُصلِّى على سيدنا محمد النبى المجتبى ، وعترته لا سيَّما الأربعة المتناسبة أصحاب العباد .

أمّا بعد فإنَّ الفقيرَ إلى اللهِ الغنىِّ بهاء الدين محمد بن الحسين[1] العاملى أنطقهُ اللهُ بالصوابِ فى يومِ الحساب ، يقولُ إنَّ عِلْمَ الحساب ، لا يخفى علوُّ شأنِه وسُموُّ مكانِه ، ورشاقةُ مَسائِله ، ووثاقةُ دلائِله ، لافتقارِ كثيرٍ من العلوم إليه ، وانعطاف جمٍّ غفيرٍ من المُعَاملاتِ عليه ، وهذه رسالةٌ حَوت الأهمَّ من أُصُوله ، ونظَّمت المهمَّ من أبوابه وفصولِه ، وتضمَّنت منه فوائدَ لطيفة هى خلاصةُ كُتُب المتقدِّمين ، وانطوَتْ منه على قواعد شريفة هى زبدةُ رسائِلِ المتأخّرين ، سمّيتُها خلاصةَ الحسابِ ، ورتّبتُها على مقدمةٍ وعشرة[2] أبواب .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : حسين .

(٢) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ ـ فى المخطوط ١٢٥٣ : عشر .

المقدمــة

الحسابُ علمٌ يُستعلمُ منه استخراجُ المجهولات العَدَدِيَّةِ من معلوماتٍ مخصوصةٍ ، وموضوعُهُ العددُ الحاصلُ فى المادَّةِ كما قيل ، ومن ثمَّة عُدَّ الحسابُ من الرياضىِّ وفيه كلامٌ ، والعددُ قيل كميَّةٌ تُطلق على الواحد وما تألَّف منه ، فيدخُلُ فيه[1] الواحد ، وقيل نصف مجموع حاشيتيه[2] فيخرج ، وقد يتكلّف لإدراجه بشمول الحاشية الكسْر ، والحقُّ أنَّه ليس بعددٍ وإن تألَّف منه الأعداد كما أنَّ الجوهر الفرد عند مثبتيه ليس بجسمٍ وإنْ تألَّف منه الأجسام ، وهو إمَّا مطلقٌ فصحيحٌ ، أو مُضافٌ إلى ما يُفرضُ واحدًا فكسْرٌ ، وذلك الواحدُ مخرجُه ، والمُطلقُ إن كان له أحد الكسور التِّسعة ، أو جذْر فمُنطَق وإلاّ فأصَمٌّ ، والْمُنْطَق إن ساوى أجزاءه فتامٌّ ، أو زاد عليها فزايدٌ ، أو نقص عنها فناقصٌ .

ومراتبُ العدَدِ أصوُلها ثلاثة ، آحادٌ وعشراتٌ ومئاتٌ ، وفروُعها ما عداها[3] مما لا يتناهى ، وتعطف إلى الأصول ، وقد وضع له حكماء الهند الأرقامَ التِّسعة المشهورة :

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

---

(١) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٢) حاشيتا العدد هما العددان السابق له واللاحق له مباشرة .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : فى هذه المقدمة يتناول بهاء الدين العاملى بالتعريف علم الحساب ، كذا العدد من صحيح وكسر ، وتام وزايد وناقص ، فيبدأ بقضية الواحد وهل هو من العدد أو خارجه ، فإن عُرِّف العدد بأنه نصف مجموع حاشيتيه ، بمعنى أنه القيمة المتوسطة للعددين السابق له واللاحق له على التسلسل الطبيعى (كأن يكون تعريف الأربعة =

= بالوسط الحسابي للعددين ٣ ، ٥) فإن الواحد لا يدخل ـ حسب هذا التعريف ـ فى العدد ، إلا إذا كانت الحاشية تشمل الكسر ، فعندئذ يمكن تعريف الواحد على أنه القيمة المتوسطة لحاشيتيه ـ وهما فى هذه الحالة $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ١ ـ علمًا بأن العدد وحاشيتيه لابد وأن يُكَوِّنوا متوالية عددية ذات تزايد ثابت .

يعرج العاملى بعد ذلك إلى تقسيم العدد إلى صحيح وكسر ، والكسور التسعة المذكورة هى $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{١٠}$ ، وإن كان للعدد جذر صحيح قيل عليه جذر مُنطق . وإن لم يكن صحيحًا سُمِّى جذرًا أصمَّ .

والعدد إن ساوى مجموع عوامله فهو تام ، فإن زاد عليها أو نقص عنها أطلق عليه عدد زائد أو ناقص على التوالى ، مثال ذلك العدد ٦ ، فإن عوامله هى : ١ ، ٢ ، ٣ بمعنى أنه يقبل القسمة على أى منها ، ومجموع هذه العوامل = ١ + ٢ + ٣ = ٦ = العدد ، ومن هنا جاءت تسميته بالتام ، أمَّا فى العدد ٤ مثلا فعوامله ١ ، ٢ ومجموعها ٣ ، فيكون العدد ٤ عددًا زائدًا ، وعلى العكس من ذلك إذا أخذنا العدد ١٨ مثلا فعوامله هى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ومجموعها ٢١ ، وبذلك يكون العدد ١٨ أنقص من مجموع عوامله ، فيوصف بأنه عدد ناقص .

ويختتم العاملى مقدمته بالإشارة إلى مراتب العدد : آحادها وعشراتها ومئاتها وما يعلوها من المراتب ، وإلى أن العدد يتركب من الأرقام التسعة المعروفة من الواحد إلى التسعة ، أما الصفر فيعنى خلاء المرتبة من أى من هذه الأرقام التسعة .

الباب الأول

فى حسابِ الصّحاحِ

زيادةُ عددٍ على آخر جمعٌ ، ونقْصُه منه تفريقٌ ، وتكريرهُ مرَّة تضعيفٌ ، ومرارًا بعدّة آحاد الآخر[1] ضربٌ ، وتجزيئُهُ بمتساويين تنصيفٌ ، وبمتساوياتٍ[2] بعدَّةِ آحاد الآخرِ قسمةٌ ، وتحصيلُ ما تألّف من تربيعِه تجْذِيرٌ ، ولنورد هذه الأعمالَ فى فصولٍ .

الفصل الأول

فى الجمع

ترسم العددين متحاذيين ، وتبدأ من اليمين ، وتزيد[3] كلّ مرتبةٍ على محاذيها ، فإن حصل أقل من عشرةٍ ترسم تحتها ، أو أزْيدَ فالزائدَ ، أو عشرة فصِفْرًا ، حافظًا فى هاتين الصورتين للعشرة واحدًا لتزيده على ما فى المرتبة الثانية ، أو ترسمه بجنب سابقِه إن خلت ، وكلُّ مرتبةٍ لا يُحاذيها عددٌ ، فانقلها بعيْنها إلى سطرِ الجمْعِ ، وهذه صورته[4] :

٢ ٠ ٣ ٧ ٢	٤ ٠ ٨ ٧ ٧	٢ ٢ ٧ ٢
٠ ٧ ٦ ٥ ٦	٣ ٠ ٢ ٨ ٣	٤ ٣ ٣ ٠
٢ ٨ ٠ ٢ ٨	٧ ١ ١ ٦ ٠	٦ ٦ ٠ ٢

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : وبمتساوية .

(٣) فى المخطوط ١٢٥٣ . زيادة .

(٤) فى المخطوط ١٢٥٣ يكتب الصفر : ٥ . والخمسة :

شرح : يبدأ العاملى الباب الأول من كتابه بتعريف العمليات الحسابية البسيطة من جمع وتفريق (وقد استعمل العرب كلمة التفريق بمعنى الطرح) ، وضرب وتنصيف وقسمة ، وتربيع (ضرب العدد فى نفسه) ، وتجذير (إيجاد العدد الذى إذا ضرب فى نفسه كان العدد المُعْطى) .

ويتناول المُصنِّفُ فى الفصل الأول عملية الجمع . وهى على النحو الذى نعرفها عليه اليوم ، وعملية الجمع ـ كما نعلم ـ تبدأ من اليمين إلى اليسار ، بيْد أنه من الممكن أيضًا إجراء عملية الجمع من اليسار إلى اليمين ، إلا أن ذلك يقتضى أن نثبت العشرة الزائدة من جمع العددين فى السطر التالى فى مرتبة أعلى (أى إلى اليسار) ، ونكتبها إما ١ أو ـ ، ثم نجمع السطرين لنحصل على حصيلة عملية الجمع ، مثال ذلك ما يلى :

المطلوب جمع : ٦٣٢٥ ، ٧٨٩٤

٥	٢	٣	٦			٥	٢	٣	٦	
٤	٩	٨	٧			٤	٩	٨	٧	
			٣			٩	١	١	٣	
				١			١	١	١	
						٩	١	٢	٤	١

فبالعمل من اليسار إلى اليمين نبدأ بجمع ٦ ، ٧ فتكون النتيجة ١٣ ، توضع ٣ تحت ٧ ويوضع ١ فى السطر التالى وفى مرتبة العشرات بالنسبة إلى ٣ (أى إلى يسارها) ، ويمكن استبدال الواحد بشرطة لمجرد الدلالة على وجود واحد فى تلك المرتبة ، ومن الواضح أن هذه الطريقة لا تكلف الذهن بتذكر أى محفوظ إذ أن كل عملية جمع عددين (بصرف النظر عن اتجاه الجمع يمينًا أو يسارًا) تسجل ـ عمومًا ـ على سطرين ، وهى طريقة يمكن بها تجنب الخطأ فى الجمع ، وما أحرانا أن نتبع هذا الأسلوب فى مدارسنا فهو أفضل وأقل تعرضا للخطأ .

وإن تكثّرت سطورُ الأعدادِ ، فارسمها متحاذية المراتبِ ، وابدأ من اليمين حافظًا لكل عشرةٍ واحدًا لمَا عرفت ، وهذه صورته :

٠ ٠ ٣ ٧ ٣
٠ ٢ ٣ ١ ٨
٩ ٥ ٨ ٤ ٣

٩ ٨ ٥ ٣ ٤

واعلم أنّ التّضعيف فى الحقيقة[1] جمْعُ المِثلَين ، إلاّ أنّك لا تحتاج إلى رسْم المثلِ ، بل تجمع كُلّ مرتبةٍ من يمينها إلى مثلِها ، كأنه بحذائها ، وهذه صورته :

٢ ٢
٢ ٥ ٢ ٠ ٧ ٣ — ٩ ٨ ٧ ٥ ٦ ٠ ٧

٥ ٠ ٤ ١ ٤ ٦ — ١ ٩ ٧ ٥ ١ ٢ ١ ٤

ولك الابتداءُ فى هذه الأعمال من اليسارِ ، إلّا أنّك تحتاجُ إلى المحْو والإثباتِ ، ورسْمِ الجداول ، وهو تطويلٌ بغير طائلٍ ، وهذه صورتها :

صورة جمع العددين : ٥ ٤ ٥ ٣ ٧
٢ ٧ ٩ ٤ ٣
٧ ١ ٤ ٧ ٠
٨ ٢ ٨
٨ ٢ ٤ ٨ ٠

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : فى تحقيقه .

صورة جمع الأعداد : ٥ ٣ ٧ ٣ ٢

٠ ٤ ١ ٧ ٩

٠ ٠ ١ ٠ ٥

---

٥ ٧ ٩ ٠ ٦

٨ ٠ ١

---

٥ ٨ ٠ ١ ٦

صورة التضعيف : ٢ ٥ ٥ ٦ ٧

---

٤ ٠ ٠ ٢ ٤

٥ ١ ١ ٣

---

٥ ١ ١ ٣ ٤

واعْلَم أنَّ ميزانَ العدد(*) ما يبقى منهُ بعدَ إسْقاطِه تِسْعةً تِسْعةً ، وامتحانُ الجمْع والتّضْعيفِ بجمْعِ ميزانَى المجموعين ، وتضعيفِ ميزانِ المُضعَّفِ ، وأَخْذُ ميزانِ المجتمِع ، فإنْ خَالفَ ميزانَ الحاصلِ ، فالعملُ خطأٌ .

---

* شرح :

ميزان العدد

يشير العاملى هنا إلى القاعدة الذهبية التى اتبعها العرب لتحقيق سلامة العملية الحسابية . وسمُّوها بميزان العدد . وتتلخص فى الخطوات التالية :

لنفرض أننا أنهينا عملية الجمع :

٩ ٧ ٤ ٣ ٥ ٦

٣ ٧ ٤ ٩ ٨ ٣

---

١ ٣ ٤ ٩ ٣ ٣ ٩ =

= والمطلوب التأكد من صحة ذلك .

١ ـ يُعرَّف ميزان العدد بأنه ما يبقى من العدد بعد إسقاطه تسعةً تسعةً ، بمعنى أننا نجمع الأرقام المكونة للعدد ، ونستبعد جميع التسعات الصحيحة منه ، فما يبقى بعد ذلك فهو ميزان العدد .

فبالنسبة لحاصل الجمع ٩ ٣ ٣ ٩ ٤ ٣ ١

واضح أنه يشتمل على : ٩ ٩

٣ ٣ ٣

وباستبعاد التسعات ، أى بإسقاط العدد تسعة تسعة يبقى ٥ فيكون ميزان حاصل الجمع هو ٥ .

٢ ـ نوجد ميزان كلٍّ من العددين المجموعين :

فبالنسبة للعدد الأول : ٦ ٥ ٣ ٤ ٧ ٩

باستبعاد : ٩

٦ ٣

٥ ٤

} إسقاط العدد تِسعةً تِسعةً

يكون الميزان : ٧

وبالنسبة للعدد الثانى : ٣ ٨ ٩ ٤ ٧ ٣

باستبعاد : ٩

٣ ٨ ٤ ٣ (= ١٨ = ٩ × ٢)

يكون الميزان : ٧

٣ ـ نجرى العملية الحسابية لميزانى العددين المعطيين

∴ ٧ + ٧ = ١٤

وباسقاط هذا العدد تسعة تسعة يكون ميزان حاصل الجمع هو (١٤ ـ ٩) = ٥ وهو نفسه ميزان حاصل الجمع الذى حصلنا عليه فى الخطوة الأولى .

فالعملية الحسابية إذن صحيحة . =

= ومن الممكن ترتيب عملية الجمع وتحقيقها بقاعدة ميزان العدد على الوجه التالى :

ميزان العدد	العدد		
٢	٧٢٩٦٥		
١	٩٠٢٧١		
٧	٧١١٠٧		
٨ ↓	٢٠٣٦٦		
صفر	٢٥٤٧٠٩	صفر	ميزان حاصل الجمع

هذا وتسرى هذه « القاعدة الذهبية » على جميع العمليات البسيطة من جمع وطرح وضرب وقسمة (حيث يمكن تحويلها إلى صورة الضرب) ، وقد عرفت فى الغرب بتسمية « Golden Rule » .

الفصـــل الثــانى

فى التَّنْصيفِ

· تبدأ من اليسار وتضع نصفَ كُلٍّ تحتَهُ إن كان زوجًا ، والصحيح من نصفه إن كان فردًا حافظًا للكسْرِ خَمْسةً لتزيدها على نصف ما فى المرتبةِ السابقةِ إن كان فيها عدد غير الواحد ، وإن كان واحدًا أو صفرًا ، وضَعْتَ الخَمْسة تحتَه ، فإن انتهت المراتبُ ومعك كسرٌ ، فضَعْ له صُورَةَ النِّصْفِ هكذا :

صورة التنصيف من اليسار :

٨ ٧ ٣ ٠ ٣ ١ ٣
٤ ٣ ٦ ٥ ١ ٥ ٦ ٥

وَلَكَ أنْ تبدأ من اليمين راسمًا للجدولِ على هذه الصورة :

٣ ٦ ٥ ٤
١ ٣ ٢ ٢

٨ ٧
١ ٨ ٢ ٧

والامتحانُ بتَضْعِيف ميزانِ النِّصْفِ ، وأَخْذِ ميزانِ المجتمع ، فَإنْ خَالَفَ ميزانَ المُنَصَّفِ ، فالعملُ خطأٌ .

شرح : يعرض بهاء الدين العاملى فى هذا الفصل لطريقة التنصيف بادئًا إمَّا من اليسار وإمَّا من اليمين ، وطريقة التنصيف بدءًا من اليسار هى نفسها الطريقة التى نتبعها اليوم ، ولذا فإنها فى غير حاجة لمزيد من شرح ، أما طريقة التنصيف من اليمين ، =

= فيقسم كل رقم على ٢ ويوضع الباقى الصحيح تحت الرقم الجارى تنصيفه ، أما الباقى وهو $\frac{١}{٢}$ أو $\frac{٥}{١٠}$ فيبين إما بعلامة (–) أو (٥) فى السطر التالى وفى مرتبة واحدة أقل وهى تعنى $\frac{٥}{١٠}$.

	المقسوم	المقسوم عليه
مثال ذلك :	٧ ٢ ٤	٢
تنصيف الرقم الأول :	٢	
تنصيف الرقم الثانى :	١	
تنصيف الرقم الثالث :	٣	
	–	العلامة (–) = ٥
ناتج القسمة :	٣ ٦ ٢	

ويمكن التحقق من نتيجة عملية التنصيف كما يلى :

$$\frac{٧٢٤}{٢} = ٣٦٢$$

أو ٧٢٤ = ٢ × ٣٦٢

معادلة موازين الأعداد ٤ = ٢ × ٢ = ٤ ∴ فالعمل صحيح .

ميزان المُنَصَّف = تضعيف ميزان النصف = ميزان المجتمع

وهو ما جاء بمتن المخطوط : «والامتحان بتضعيف ميزان النّصْف ، وأخذ ميزان المجتمع ، فإن خالَفَ ميزانَ المُنَصَّفِ ، فالعمل خطأ» .

الفصـــل الثـــالث

فى التَّفْرِيقِ

تضعهُما كما مرَّ وتبدأُ من اليمين ، وتَنْقص كُلَّ صورة من محاذيها ، وتضع الباقى تحتَ الخطِّ العَرْضِىِّ ، فإنْ لم يبْق شىءٌ فصفْرًا ، وإن تعذَّرَ النقصانُ منه[1] أَخَذْتَ الواحدَ[2] من عشراته ، ونَقصت منه ، ورسَمْتَ الباقى ، فإنْ خَلَت عشراتُه أخذته من مئاته ، وهو عشرة بالنسبة إلى عشراته ، فضع فيها منه تسعةً ، واعمل بالواحدِ لما عرفت ، وتمِّم العملَ هكذا :

٩٠٧٣٥٠٦	مَنْقُوصٌ منه
٢٩٠٠٩٥٨	مَنْقُوصٌ
٦١٧٢٥٤٨	الباقى من المنقوص منه

ولك الابتداء من اليسار هكذا :

٩٢٦٣	منقوص منه
٦٢٨٤	منقوص
٣٠٨٩	
٢٩٧	
٢٩٧٩	

والامتحانُ بنقصانِ ميزانِ المنقُوص من ميزان المنقوص منه إن أمكن ، وإلاَّ زيدَ عليه تسعةٌ وتنقص ، فالباقى إن خالف ميزانَ الباقى ، فالعملُ خطأٌ .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : واحدًا

شرح : فى هذا الفصل يبين العاملى كيفية إجراء عملية الطرح (ويعبّر عنها هنا بالتفريق) سواء بالابتداء من اليمين أو من اليسار ، ونكتفى هنا ببيان الصورة الأخيرة : =

ميزان العدد

المطروح منه :	٨ ٦ ٩ ٥ ٣	٤
المطروح :	− ٦ ٧ ٦ ٨ ٢	٢
	٢ ٩ ٣ ٧ ١	
(مطروح)	١ ١	يعبر عنها فى المخطوط بالعلامة (−)
ناتج الطرح :	**١ ٩ ٢ ٧ ١**	**٢**

فى المثال نبدأ من اليسار فيكون حاصل طرح ٦ من ٨ العدد ٢ الذى يكتب تحتهما ، ثم نتقدم يمينًا فنجد ٦ منقوص منها ٧ ، وبالتالى نزيد عشرة إلى الستة فتصبح ١٦ ونطرح منها ٧ فيكون الناتج ٩ ، وتكتب تحت السبعة . ولما كنا قد زدنا عشرة لنتمكن من إجراء الطرح الجزئى فلابد من طرح عشرة ليستقيم العمل ، ولذلك نضع فى السطر التالى ١ (أو العلامة ـ بنفس المعنى) فى مرتبة أعلى ، على أن يجرى طرحها فى العملية التالية ، وهكذا بالنسبة لبقية عمليات الطرح الجزئية .

ويمكن التحقق من صحة العملية على أساس قاعدة ميزان العدد :

(ميزان المطروح منه ـ ميزان المطروح) = ميزان ناتج الطرح

الفصل الرابع

في الضَّربِ

وهو تحصيلُ عددٍ نسبةُ أحدِ المضروبين إليه كنسبة الواحدِ إلى المضروبِ الآخر . ومن هذا يعلم أنَّ الواحدَ لا تأثير له في الضَّرب . وهو ثلاثة : مفرد في مفرد ، أو في مركّب ، أو مركَّب في مركَّب . والأول إمّا آحاد في آحاد أو في غيرها ، أو غيرها في غيرها .

أمَّا الأوَّل فهذا الشكل متكفّل به* ، وأمَّا الأخيران فردَّ فيهما غير الآحاد إلى سميّها منها . واضرب الآحاد في الآحاد ، واحفظ الحاصلَ ، ثمَّ اجمع مراتب المضروبين . وابسط المجتمِعَ من جِنْس متْلُوِّ المرتبةِ الأخيرة ، ففي ضرب الثلاثين في الأربعين تَبْسُط الاثنى عشر بمئآت إذ المراتب أربعٌ ، والثالثة مرتبة المئات ، وفي ضرب الأربعين في خمسمائة تبسط العشرين أُلوفًا ، إذ المراتبُ خمسٌ ، وأمَّا الثاني والثالث فإذا حَلَّ المُركَّب إلى مُفرداتِه رَجَع إلى الأوَّلِ . فاضْرب المفردات بعضها في بعضٍ واجْمع الحواصلَ .

وللضَّرْبِ قواعدُ لطيفةٌ تُعين على استخراج مطالب شريفة :

قاعدة فيما بين الخمسة والعشرة

تبسط أحد المضروبَيْن عشرات وتنقص من الحاصل مضروبَه في فضْلِ العشرة على المضروبِ الآخر .

شرح : في هذا الفصل يشرح العاملي طريقة الضرب مبيّنًا مراتب المضروبين ، وهي نفس الطريقة التي نستعملها اليوم ، ويقدم العاملي جدولاً لضرب الأعداد المفردة (من الواحد إلى التسعة) بعضها في بعض . وبالإضافة إلى بيانه للطريقة العامة لضرب عدد مركب في عدد مركب آخر ، فإنه يعرض بعض القواعد الخاصة لتسهيل عملية الضرب .

=

١	٢							
٢	٤	٣						
٣	٦	٩	٤					
٤	٨	١٢	١٦	٥				
٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٦			
٦	١٢	١٨	٢٤	٣٠	٣٦	٧		
٧	١٤	٢١	٢٨	٣٥	٤٢	٤٩	٨	
٨	١٦	٢٤	٣٢	٤٠	٤٨	٥٦	٦٤	٩
٩	١٨	٢٧	٣٦	٤٥	٥٤	٦٣	٧٢	٨١

= فى القاعدة الأولى التى تختص بضرب أعداد بين ٥ ، ١٠ فى بعضها البعض ، تضرب أحد العددين فى عشرة ، ثم تطرح من الحاصل مضروب نفس العدد فى الفرق بين العشرة والعدد الثانى .

مثال ذلك ضرب ٨ × ٩

ويمكن وضعها على الصورة : ٩ (١٠-٢) = ٩٠ - ٩ × ٢
= ٧٢

أما القاعدة الأخرى (لضرب الأرقام بين الخمسة والعشرة) فتحدد الخطوات كالتالى :

١ ـ اجمع الرقمين المطلوب ضربهما فى بعضهما البعض .
٢ ـ من حاصل الجمع خذ رقم الآحاد واضربه فى عشرة .
٣ ـ ثم اجمع عليه حاصل ضرب فرق كل من الرقمين عن العشرة .

مثال ذلك : ٨ × ٧

الخطوة الأولى : ٨ + ٧ = ١٥

الخطوة الثانية : ما يزيد عن العشرة هو ٥

نبسط ما فوق العشرة عشرات : أى ٥ × ١٠

مثالها : ثمانيةٌ فى تسْعةٍ

نَقَصْنا من التسعين مضروب التِّسْعةِ فى الاثنين ، بقى اثنان وسبعون .

قاعدة أخرى : تجمع المضروبين ، وتبسطَ مافوق العشرةِ عشراتٍ ، وتزيدَ على الحاصلِ مضروبَ فَضْلِ العشرة على أحدهما فى فضْلِها على الآخر .

مثالها : ثمانيةٌ فى سبْعةٍ .

زدْنَا على الخمسين مضروبَ الاثنين فى الثلاثة .

قاعدة فى ضرب الآحاد فيما[1] بين العشرة والعشرين :

تجمع المضروبين ، وتبسطَ الزّائدَ على العشرةِ عشرات ، ثم تنقص من الحاصلِ مضروبَ مابين المفرد والعشرة فى الآحاد التى مع المركّبِ .

مثالها : ثمانيةٌ فى أربعةِ عشر

نقصنا من المائة والعشرين مضروبَ الاثنين فى الأربعة .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

= الخطوة الثالثة : ٥ × ١٠ + (١٠ − ٨) (١٠ − ٧)

= ٥٠ + ٢ × ٣ = ٥٦

وهذه القاعدة سليمة تمامًا ، ويمكن البرهنة عليها على الوجه التالى باستعمال الرمزين أ ، ب للعددين المطلوب إيجاد حاصل ضربهما .

الخطوة الأولى : أ + ب

الخطوة الثانية : [(أ + ب) − ١٠] × ١٠

الخطوة الثالثة : [(أ + ب) − ١٠] × ١٠ + (١٠ − أ) (١٠ − ب)

= (١٠أ + ١٠ب − ١٠٠) + (١٠٠ − ١٠أ − ١٠ب + أب)

= أب   وهو المطلوب

من الواضح أن هذه القاعدة ذات صفة عامة ، ويمكن تطبيقها على العددين أ ، ب أيًّا كانت قيمهما سواء تحت العشرة أو فوقها ، كل ما هنالك هو تغيُّر إشارة القوسين (١٠ − أ) ، (١٠ − ب) أو أى منهما حسب قيمة العددين أ ، ب .

قاعدة فى ضرب مابين العشرة والعشرين بعضها فى بعض :

تزيد آحاد أحدهما على مجموعِ الآخر ، وتبسطَ المجتمعَ عشراتٍ ، ثم تضيفَ إليه مضروبَ الآحادِ فى الآحاد .

مثالها : ضرب[1] اثنى عشر فى ثلاثة عشر .

زِدْنا[2] على المائة والخمسين الستة[3] .

قاعدة :

كلُّ عددٍ يُضرب فى خمسة ، أو خمسين ، أو خمسمائة ، فابسط نصفه عشرات ، أو مئات ، أو ألوفًا ، وخذ للكسْر نصف ما أَخَذْت للصحيح .

مثالها : ستّةُ عشر فى خمسةٍ ، يحصل بعد العمل[4] ثمانون .

أو سبعة عشر فى خمسين ، يحصل بعد العمل[5] ثمان مائة وخمسون .

(أو سبعة عشر فى خمسمائة ، فالجواب ثمانية آلاف وخمسمائة)[6] .

قاعدة فى ضرب مابين العشرة والعشرين

فيما بين العشرة والمائة من المركّبات

تضرب آحاد أقلّها فى عِدّة تكرارِ العشرةِ ، وتزيدَ الحاصلَ على أكثرهما ، وتبسُطَ المجتَمِعَ عشراتٍ ، وتزيدَ عليهِ مضروبَ الآحادِ فى الآحادِ .

مثالها : اثنا عشر فى ستّةٍ وعشرين .

زِدْت الأربعةَ على السّتة والعشرين ، وبَسَطْتَ الثّلاثين عشرات ، و[7] تمّت العمل تحصل ثلثمائة واثنتا عشرة .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) فى المخطوط ٧٥٣ : بزيادة .

(٣) فى المخطوط ١٢٥٣ : ستة .

(٤) فى المخطوط ١٢٥٣ : الجواب .

(٥) فى المخطوط ١٢٥٣ :. فالجواب .

(٦) زائدة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٧) فى المخطوط ٧٥٣ : فإذا .

قــاعدة

كلُّ عددٍ يُضربُ فى خمسة عشر ، أو فى مائة وخمسين ، أو فى ألف وخمس مائة ، فزِدْ عليه نصفَهُ ، وابسُط الحاصلَ عشراتٍ أو مئاتٍ أو ألوفًا ، وخُذ للكسْر نصفَ ما أخذت للصَّحيح .

مثالها : أربعةٌ وعشرون فى خمسةِ عشر .

تحصل بعد العمل[1] ثلاثمائة وستّون ، أو خمسةٌ وعشرون فى مائة وخمْسين ، تحصل بعد العمل[1] ثلاثة آلاف وسبعمائة وخمسون .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : الجواب .

= شرح : نوضِّح ضرب مابين العشرة والعشرين فيما بين العشرة والمائة من المركبات . فنفرض العددين المطلوب إيجاد حاصل ضربهما :

(أ + ١٠) ، (ب + ١٠ ن)

حيث أ ، ب آحاد العددين ، ن عدة تكرار العشرة فى العدد الأكبر أى رقم العشرات فيه .

فطبقا للقاعدة التى يوردها العاملى يكون حاصل الضرب

= [أ × ن + (ب + ١٠ ن)] × ١٠ + أ × ب

آحاد الأقل فى عدة تكرار العشرة — أكثر العددين — بسط المجتمع فى عشرة — مضروب الآحاد فى الآحاد

= (١٠ أ ن + ١٠ ب + ١٠٠ ن + أ ب)

وبإجراء عملية الضرب (أ + ١٠) × (ب + ١٠ ن) بفك القوسين

نحصل على : (أ ب + ١٠ أ ن + ١٠ ب + ١٠٠ ن)

وبالتالى فالقاعدة صحيحة .

ففى المثال : ١٢ × ٢٦

حاصل الضرب = (٢ × ٢ + ٢٦) × ١٠ + ٢ × ٦

= ٣٠٠ + ١٢ = ٣١٢

قاعدة فى ضرب ما بين العشرين والمائة

مما تساوت عشراته بعضه فى بعض

تزيد آحاد أحدهما على الآخر ، وتضربَ المجتمِعَ فى عِدَّة تكرارِ العشرةِ ، وتبسُطَ الحاصلَ عشراتٍ ، ثمَّ تزيد عليه مضروبَ الآحادِ فى الآحاد .

مثالها : ثلاثةٌ وعشرون فى خمسةٍ وعشرين .

ضربْتَ الثمانية والعشرين فى اثنين ، وبَسَطْتَ السِّتَّةَ والخمسين عشراتٍ ، وتمت العمل[1] حصل المطلوب[2] . هو[2] خمسمائة وخمسة وسبعون .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : فى قاعدة ضرب مابين العشرين والمائة مما تساوت عشراته بعضه فى بعض نرمز للعددين المطلوب ضربهما بالقوسين :

(أ + ١٠ ن) ، (ب + ١٠ ن)

حيث أ ، ب آحاد العددين ، ن عدة تكرار العشرة (وهى متساوية فى العددين) .

فحسب القاعدة يكون حاصل ضرب العددين

(أ + ١٠ ن) × (ب + ١٠ ن)

مساويا لـ

[أ + (ب + ١٠ ن)] × ن × ١٠ + أ ب

آحاد أحد العددين مزاد على العدد الآخر	ضرب المجتمع فى عدة تكرار العشرة	بسط الحاصل عشرات	مضروب الآحاد فى الآحاد

= (١٠ أ ن + ١٠ ب ن + ١٠٠ ن^{٢} + أ ب)

وبإجراء عملية ضرب القوسين (أ + ١٠ ن) (ب + ١٠ ن) نحصل على نفس النتيجة . ومن ثم فالقاعدة صحيحة

فى المثال : المطلوب إيجاد حاصل ضرب ٢٣ × ٢٥

الجواب : [٣ + ٢٥] × ٢ × ١٠ + ٣ × ٥

= ٥٦٠ + ١٥ = ٥٧٥

قاعدة فيا اختلف عِدّةُ عشراته ممّا بين العشرين والمائة

تضربَ عِدّة عشرات الأقلّ فى مجموع الأكثر ، وتزيدَ عليه مضروبَ آحاد الأقلّ فى عدّةِ عشرات الأكثر ، وتبسطَ المجتمِعَ عشراتٍ ، وتضيفَ إليه مضروبَ الآحاد فى الآحاد .

مثالها : ثلاثةٌ وعشرون فى أربعة وثلاثين .

فزد على الثّمانية والسّتّين تسعةً ، وأضف إلى السّبعمائة والسبعين ، اثنى عشر ، (حصل المطلوب)[١] .

قاعدة :

كلُّ عددين مُتَفَاضِلَيْن (أى غير متساويين)[١] نصفُ مجموعهما مُفْرَدٌ ، تجمعهما وتضربَ نِصْفَ المجتمِعَ فى نفسهِ ، وتُسْقِطَ من الحاصلِ مضروبَ نصفِ التفاضل بينهما فى نفسِه ، (فالباقى هو المطلوب)[١] .

مثالها : أربعةٌ وعشرون فى ستّةٍ وثلاثين .

فاسْقِط من التسعمائة (مضروبَ نصْفِ التّفاضُلِ فى نفسِه ، أعنى)[٢] ستّةً وثلاثين ، يبقى ثمانمائة وأربعةٌ وستون .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .
(٢) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

شرح : فى « قاعدة فيا اختلف عدّةُ عشراته مما بين العشرين والمائة » نفرض العددين (أ + ١٠ $ن_{١}$) ، (ب + ١٠ $ن_{٢}$) حيث $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ عدة تكرار العشرات فيهما ، $ن_{١}$ أقل من $ن_{٢}$.

فيكون العدد الأقل (أ + ١٠ $ن_{١}$)

والعدد الأكثر (ب + ١٠ $ن_{٢}$)

=

= ، فطبقا للقاعدة :

حاصل الضرب = [ن$_1$ (ب + ١٠ ن$_2$) + أ ن$_2$] × ١٠ + أ ب

عدة عشرات العدد الأقل — الأكبر — مضروب آحاد الأقل فى عدة عشرات الأكبر — بسط المجتمع عشرات — مضروب الآحاد فى الآحاد

= (١٠ ب ن$_1$ + ١٠٠ ن$_2$ ن$_2$ + ١٠ أ ن$_2$ + أ ب)

وعند ضرب العددين (أ + ١٠ ن$_1$) ، (ب + ١٠ ن$_2$) فى بعضهما البعض نحصل على نفس النتيجة ، ومن ثمَّ فالقاعدة سليمة .

وفى المثال : ٢٣ × ٣٤

يكون الجواب : [(٢ × ٣٤) + ٣ × ٣] × ١٠ + ٣ × ٤

= (٦٨ + ٩) × ١٠ + ١٢ = ٧٧٠ + ١٢ = ٧٨٢

وفى القاعدة التالية نفرض العددين المتفاضلين (المختلفين) ع$_1$ ، ع$_2$ فيكون حاصل ضربهما ـ طبقا للقاعدة ـ هو :

$$\left(\frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{ع_1 - ع_2}{2}\right)^2$$

مضروب نصف مجموع العددين فى نفسه — مضروب نصف التفاضل (الفرق) بين العددين فى نفسه

أى أن حاصل الضرب قد تم تحويله إلى فرق بين مربعين وبإيجاد هذا الفرق نحصل على :

$$\left(\frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{ع_1 - ع_2}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{ع_1 + ع_2}{2} - \frac{ع_1 - ع_2}{2}\right)\left(\frac{ع_1 + ع_2}{2} + \frac{ع_1 - ع_2}{2}\right)$$

= ع$_2$ ع$_1$

وبذلك تثبت صحة القاعدة .

وفى المثال : ٢٤ × ٣٦

حاصل الضرب = $\left(\frac{٣٦ + ٢٤}{٢}\right)^2 - \left(\frac{٣٦ - ٢٤}{٢}\right)^2$

= ٣٠^2 − ٦^2 = ٩٠٠ − ٣٦ = ٨٦٤

قاعدة

قد يسهّل الضربُ بأن تنسبَ أحدَ المضروبين إلى أوّلِ أعداد مرتبة فوقه ، وتأْخذ بتلك النّسبة من الآخر ، وتبسُطَ المأخوذَ من جنسِ المنسوبِ إليه ، والكسْر بحسبه .

مثالها : خمسةٌ وعشرون فى اثنى عشر .

تنسب الأول إلى المائة بالرُّبْعِ ، وتأخذ رُبْعَ الاثنى عشر ، وتبسُطَ المئات[1] .

أو فى ثلاثة عشر .

فرُبْعُها ثلاثةٌ وربْعٌ ، فيحصل[2] ثلاثمائة وخمسة وعشرون .

قاعدة

قد يسهّل الضّرب بأن تُضَعّف أحدَ المضروبين مرّةً فصاعدًا ، وتنصِّفَ الآخرَ بِعِدَّة ذلك ، وتضربَ ما صار إليه أحدهما ، فيما صار إليه الآخرُ .

مثالها : خمسةٌ وعشرون فى ستّة عشر .

فلو ضُعّفَ الأوّلُ مرتين ، ونُصِّفَ الثانى كذلك ، لرجع إلى ضرب أربعةٍ فى مائةٍ ، وهو أظهرُ .

تبصرة

فإن تكثّرت المراتبُ ، وتشعّبَ العملُ ، فاستعن بالقلم .

فإن كان ضربُ مُفرَدٍ فى مركّبٍ فارسمها ، ثمّ اضرب المُفْرَدَ بصورته فى المرتبة

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : مائة .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : فالجواب .

الأولى ، وارسُمْ آحاد الحاصلِ تحتها ، واحفظ لعشراته آحادًا بعدّتها لتزيدها على حاصلِ ضرْبِ ما بعدها إن كان عددًا ، وإن كان صفرًا ، رَسَمْتَ[1] عِدّة العشرات تحته[2] ، وإن لم يحصل آحادٌ ، فضعْ صِفرًا ، حَافِظًا لكلِّ عشرةٍ[3] واحدًا ، لتفعل به ما عرفْتَ ، ومتى ضربْتَ فى صفرٍ ، فارسم صفرًا ، أو إن كان مع المفرد أصفارًا فارسمها عن يمين سطر الخارج .

مثاله : خمسةٌ فى هذا العدد ٦٢٠٤٣ ، فصورةُ العمل هكذا)[4] :

```
 ٦٢٠٤٣ |
     ٥ |
 ______|
٣١٠٢١٥
```

ولو كانت خمسمائة لزدت عليه[5] قبلَ سطرِ الحاصلِ صفرين ، هكذا :

```
   ٦٢٠٤٣ |
     ٥٠٠ |
 ________|
٣١٠٢١٥٠٠
```

وإن كان ضربُ مركَّبٍ فى مركَّبٍ ، فالطُّرقُ فيه كثيرةٌ ، كالشّبكة ، وضرب التّوشيح والمحاذات وغيرها .

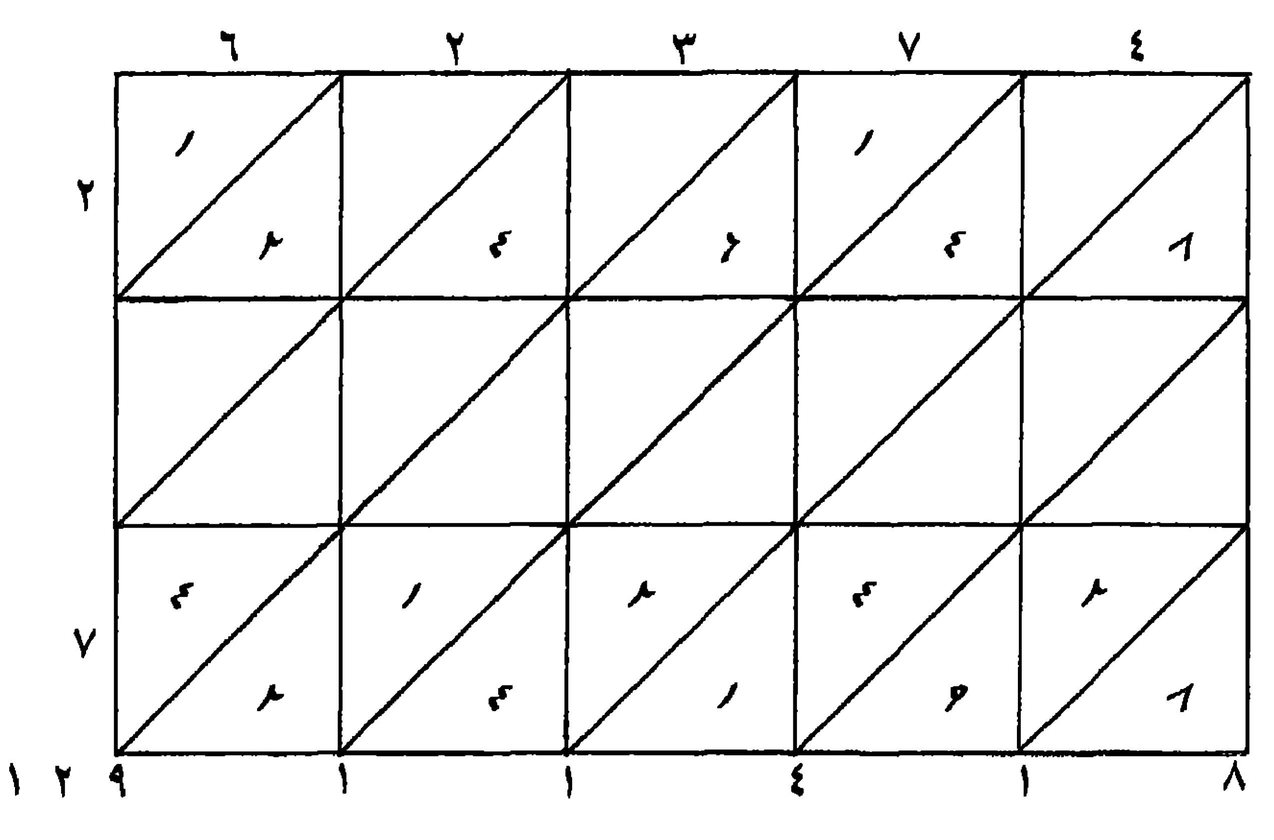
والأظهرُ الشّبكةُ ، ترسم شكلاً ذا أربعةِ أضلاعٍ ، وتقسم إلى مربّعات ، وكلاًّ منها إلى مُثلَّثين ، فوقانيّ وتحتانيّ بخطوط مُوَرَّبَةٍ كما سترى ، وتضع أحد المضروبين فوقه ، كلَّ مرتبةٍ على مربّعٍ ، والآخر عن يساره ، فالآحاد تحت العشرات ، وهى

---

(١) فى المخطوط ٧٥٣ : ترسم .
(٢) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .
(٣) فى المخطوط ٧٥٣ : عشرته .
(٤) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .
(٥) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

تحت المئات ، وهكذا ، ثمّ اضرب صُوَرَ المفردات كُلاًّ فى كلٍّ ، وضَع الحاصِلَ فى مُربَّعٍ يُحاذيهما ، آحَادُهُ فى[1] المثلّث التّحتانىّ ، وعشراته فى الفوقانىّ ، واترك المربعات المحاذية للصِّفر خالِيةً ، فإذا تمّ الحشو فضَع ما فى المثلث التحتانى الأيمن تحت الشكل ، فإن خلا فصِفرًا ، وهو أوّل مراتب الحاصل ، ثم اجمع ما بين كلِّ خطَّين موزَّبيَن ، وضع الحاصل عن يسار ما وضَعْتَ أوّلا ، فإنْ خلا فصفرًا ، كما فى الجمع .

مثاله : هذا العدد ٦٢٣٧٤ فى هذا العدد ٢٠٧ وصورة الشبكة والعمل هكذا :



والامتحانُ بضرْبِ ميزانِ المضروب ، (فى ميزان المضروب)[2] فيه ، فميزانُ الحاصِلِ إن خالَفَ ميزانَ الـخارجِ ، فالعملُ خطأٌ .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : من.

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

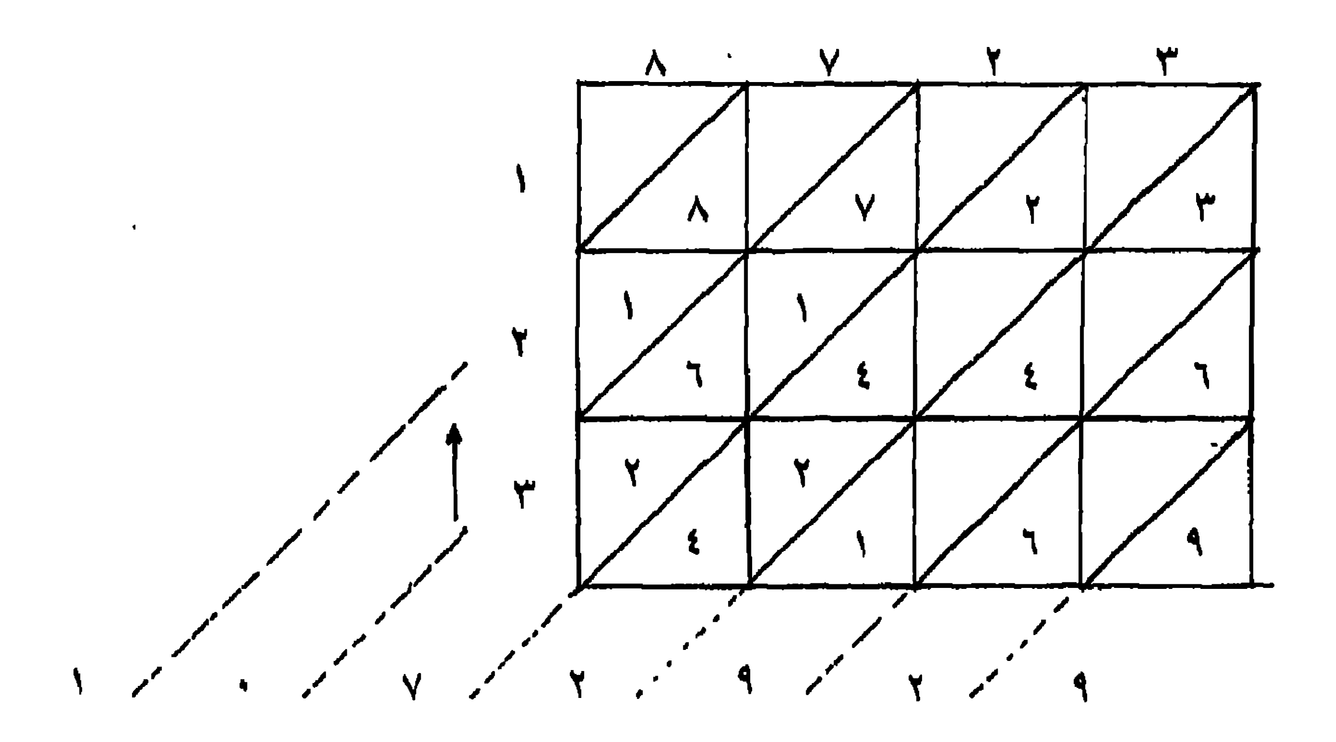
شرح : فى هذه التبصرة يبدأ العاملى بشرح كيفية ضرب عدد مفرد فى عدد مركب ، وهى بعينها نفس الطريقة التى نستعملها اليوم .

أما عند ضرب عددين مركبّين فى بعضهما البعض فإن العاملى يخص بالشرح طريقة الشبكة ، ونشرحها بالمثال التالى :

=

المطلوب إيجاد حاصل ضرب : ٨٧٢٣ × ١٢٣

إنشاء الشبكة



∴ ٨٧٢٣ × ١٢٣ = ١٠٧٢٩٢٩

خطوات العمل :

(١) نرسم مستطيلاً ونقسمه إلى مربعات بحيث يكون عدد المربعات فى الاتجاه الأفقى مساويًا لعدد أرقام أحد المضروبين ، ويكون عدد المربعات فى الاتجاه الرأسى مساويًا لعدد أرقام المضروب الآخر.

(٢) نقسم كل مربع إلى مثلثين مثلث علوى وآخر سفلى وذلك بواسطة خطوط مائلة كما هو موضح بالشكل.

(٣) نضع أرقام المضروب الأول فوق الشكل بحيث يقع كل رقم فوق مربع بحيث يكون رقم الآحاد عند المربع الأول يليه رقم العشرات فى المربع التالى وهكذا حتى نهاية أرقام المضروب الأول.

= (٤) نضع أرقام المضروب الثانى إلى الجانب الأيسر للمستطيل بحيث يقع كل رقم منه أمام مربع ، مبتدئين برقم الآحاد عند أسفل مربع ثم رقم العشرات فى المربع الذى يعلوه وهكذا حتى نهاية أرقام المضروب الثانى .

(٥) نبدأ بضرب الرقم العلوى للمضروب الثانى (وهو رقم أعلى مرتبة فيه) فى المضروب الأول واضعين حاصل ضرب كل رقم فى الآخر فى المربع الخاص به بحيث يكون آحاد حاصل الضرب فى المثلث السفلى من المربع ورقم عشرات حاصل الضرب فى المثلث العلوى منه .

(٦) نكرر العمل بالنسبة لبقية أرقام المضروب الثانى .

(٧) نجمع الأرقام المتحصلة فى المستطيل ، وذلك فى الاتجاه القطرى (أى فى اتجاه الخطوط الموربة) بادئين من اليمين إلى اليسار ، بحيث نجمع كل ما بين خطين موربين ونضيف رقم العشرات إلى مجموعة الأرقام فى الخطين الموربين التاليين وهكذا لنحصل على حاصل الضرب بطريق الشبكة .

هذا ويمكننا تحليل طريقة الشبكة بمقارنتها بطريقة الضرب التى نستعملها اليوم ، ففى هذه الطريقة نبدأ بضرب رقم آحاد المضروب الثانى فى أرقام المضروب الأول ، ثم رقم عشرات المضروب الثانى (ويكون حاصل الضرب مبتدئًا من خانة العشرات ـ أى مُرحَّلاً إلى رتبة أعلى) ، وبعد ذلك نضرب رقم مئات المضروب الثانى فى المضروب الأول ، ويكون حاصل الضرب مبتدئًا من خانة المئات ، ثم نجمع المتحصل من عمليات الضرب الجزئية هذه .

وطريقة الشبكة لا تختلف ـ فى جوهرها ـ عن طريقتنا الحالية ، إلا أنه فى طريقة الشبكة يُبدأ بضرب رقم أعلى رتبة فى المضروب الثانى فى المضروب الأول ، ثم المرتبة الأقل . ويلاحظ أن الترتيب الهندسى للشبكة (المثلثات الفوقانية والتحتانية) تؤدى مباشرة إلى ترحيل الأرقام إلى الرتبة الأقل ، ويتضح ذلك بجلاء عند مقارنة الأرقام فى الخطوط الموربة مع الأرقام فى الأعمدة الرأسية فى المثال المشروح (٨٧٢٣ × ١٢٣) حيث نجد تطابقًا تاما بينها .

	الطريقة الحالية	طريقة الشبكة	
المضروب الأول	٨٧٢٣	٨٧٢٣	المضروب الأول
المضروب الثانى	١٢٣	١٢٣	المضروب الثانى
الضرب من اليمين إلى اليسار.		الضرب من اليسار إلى اليمين.	
ضرب الآحاد	٢٤١٦٩	٨٧٢٣	ضرب المئات
	٢	١	
ضرب العشرات	١٦٤٤٦٠	١٦٤٤٦	ضرب العشرات
	١	٢	
ضرب المئات	٨٧٢٣٠٠	٢٤١٦٩	ضرب الآحاد
	١٠٧٢٩٢٩	١٠٧٢٩٢٩	

مما تقدم تتضح سلامة طريقة الشبكة فى إجراء عملية ضرب الأعداد المركبة بعضها فى بعض . ونظرًا لسهولة عمليات الضرب الجزئية فيها مما لا يُحتاج معه إلى إستيعاب أى عدد محفوظ ، فإن هذه الطريقة قد تكون أيسر وأقل خطأً للمبتدئين من طريقة الضرب التى نتبعها فى عصرنا الحالى .

وللتحقق من سلامة عملية الضرب يمكن تطبيق القاعدة الذهبية كما سماها الغربيون وهى قاعدة ميزان العدد التى سبق شرحها .

ميزان المضروب × ميزان المضروب فيه = ميزان حاصل الضرب

أو ميزان المضروب الأول × ميزان المضروب الثانى = ميزان حاصل الضرب

وبتطبيقها على المثال الوارد فى المخطوط :

٦٢٣٧٤ × ٢٠٧ = ١٢٩١١٤١٨

فبإسقاط تسعة تسعة نحصل على موازين الأعداد

٤ × صفر = صفرًا

وبتطبيق القاعدة على المثال المشروح :

٨٧٢٣ × ١٢٣ = ١٠٧٢٩٢٩

(٢ × ٦)

٣ = ٣

∴ فعمليات الضرب صحيحة .

الفصل الخامس

في القسمة

وهى طلبُ عددٍ نسبتهُ إلى الواحدِ كنسبةِ المقسومِ إلى المقسوم عليه ، فهى عكسُ الضَّربِ ، والعملُ فيها أن تطلُبَ عددًا إذا ضربته فى المقسوم عليه ، يساوى الحاصلُ المقسُومَ أو نقص عنه بأقلّ من المقسوم عليه ، فإن ساواه[1] فالمفروضُ خارجُ القسمة ، وإن نقص عنه كذلك فانسب ذلك الأقلَّ إلى المقسُوم عليه ، فحاصلُ النّسبة مع ذلك العدد هو الخارج ، فإن تكثَّرت الأعدادُ فارْسم جدولاً سطورُهُ بِعدَّةِ مراتب المقسوم ، وضَعْها خلالها . والمقسومَ عليه تحته بحيث يحاذى آخِرُه آخِرَه إن لم يزد المقسوم عليه عن محاذيه من المقسوم إذا حاذاه ، وإلاَّ فبحيث يُحاذى متلوَّ آخر المقسوم ، ثم تطلب أكثر عددٍ من الآحاد يمكن ضربُه فى واحدٍ (واحدٍ)[2] من مراتب المقسوم عليه ، ونقصان الحاصل مما يحاذيه من المقسوم ، وممّا على يساره إن كان شيء ، واضعًا للباقى تحت خطٍّ فاصلٍ . فإذا وجدته وضعته فوق الجدول محاذيًا لأول مراتب المقسوم عليه ، وعملت به ما عرفتَ ثم تنقل المقسوم عليه إلى اليمين بمرتبة أو ما بقى من المقسوم إلى اليسار بعد خطٍّ عرضىٍّ ، ثم تطلب أعظَمَ عَدَدٍ آخر كما مرّ ، وضعْه عن يمين الأوّلِ ، واعمل به ما عرفت ، فإن لم يوجد فضعْ صفرًا ، وانقل كما مرّ وهكذا ليصير أوّلُ المقسومِ مُحاذيًا لأوّل المقسوم عليه ، فيكون الموضوعُ أعلى[3] الجدول خارجَ القسمةِ ، فإنْ بقى من المقسوم شىءٌ فهو كسْرٌ ، مخرجُهُ المقسوم عليه .

---

(١) فى المخطوط ٧٥٣ : ساوى .

(٢) زائدة فى المخطوط ٧٥٣ .

(٣) فى المخطوط ٧٥٣ : على .

مثاله : تقسيمُ هذا العدَدَ ٩٧٥٧٤١ على هذا العدد ٥٣ فخارجُ القسمة ١٨٤١٠ من الصِّحاح ، وأحد عشر[1] جزءا من ثلاثة وخمسين إذا فرض واحدا ، وهذه صورته :

	١	٨	٤	١	٠
٩	٧	٥	٧	٤	١
٥	٣				
٤	٤				
٤	٠				
	٤				
	٢	٤			
	٢	١			
	٢	٠			
		١			
		١	٢		
		٠	٥		
			٥	٣	
			٠	١	١
				٥	٣
			٥	٣	
		٥	٣		
	٥	٣			
٥	٣				

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : وستة وأربعين ، وهو ولاشك خطأ وتحريف .

والامتحانُ بضرب ميزان الخارج ، فى ميزان المقسوم عليه ، وزيادة ميزان الباقى إن وجد[١] على الحاصل ، فيزانُ المجتمِعِ إنْ خالَفَ ميزانَ المقسومِ ، فالعملُ خطأٌ .

---

(١) فى المخطوط ٧٥٣ : كان .

شرح : طريقة القسمة الواردة فى المخطوط لا تختلف فى جوهرها عن الطريقة التى نتبعها فى عصرنا الحالى ، إنما يقع الخلاف فى مواضع كتابة المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة ، فبالنسبة للمثال المذكور يمكن مقارنة الحل على صورته الحالية مع الحل الموجود فى المخطوط .

المقسوم	٩٧٥٧٤١	٥٣	المقسوم عليه
	٥٣		
	٤٤٥	١٨٤١٠ ١١/٥٣	ناتج القسمة
	٤٢٤		
	٢١٧		
	٢١٢		
	٥٤		
	٥٣		
	١١		

ليتأكد لنا أننا لم نزد شيئًا ــ فى الواقع ــ عما عرفه العرب قبلاً فى موضوع القسمة .

الفصل السادس

فى استخراج الجذر[1]

العددُ المضروبُ فى نفسه يُسمَّى جذرًا فى المُحاسبات ، وضِلْعًا فى المساحةِ ، وشيئًا فى الجَبْرِ والمقابلةِ ، ويُسمَّى الحاصلُ مجذُورًا ، ومُربَّعًا ، ومَالاً .

والعددُ إن كان قليلاً فاستخراجُ جذْرِه لا يحتاج إلى تأمُّلٍ إن كان مُنْطَقًا ، وإن كان أصمَّ ، فأسقِطْ منه أقْربَ المجذورات إليه ، وانسب الباقى إلى مضعّف جذر المُسْقَطِ مع الواحدِ ، فجذْرُ المسقَطِ مع حاصلِ النسبةِ هو جذْرُ الأصمِّ بالتقريب ، وإن كان كثيرًا فضعْه خلال جدولٍ كالمقسوم ، وعَلِّم مراتبه بتخطّى مرتبة ، مَرتبة[2] ، ثم اطلب أكثر عدد من الآحاد ، وإذا ضُرب فى نفسِه ونقص الحاصل مما يحاذى العلامة الأخيرة ، ومما عن يساره أفناه أو بقى أقل من المنقوص منه ، فإذا وجدته وضعته فوقها وتحتها بمسافة ، وضربت التحتانى فى الفوقانى ، ووضعت الحاصل تحت العددِ المطلوبِ جذرُه بحيث يُحاذى آحادُه المضروبَ فيه ، ونقصته مما يحاذيه ، وممَّا عن يساره ، ووضعتَ الباقى تحته بعد الفاصلة ، ثم تزيد الفوقانى على التحتانى ، وتنقل الجميع إلى اليمين بمرتبة ، ثم تطلب أعظمَ عددٍ كذلك إذا وضعته فوق العلامةِ التى قبْلَ العلامةِ الأخيرة وتحتها أمكن ضربهُ فى مرتبة مرتبة من التحتانى ، ونقصان الحاصل مما يحاذيه ، وممَّا عن يسارِه ، فإذا وجدته وعملت به ما عرفت زدْتَ الفوقانى على التحتانى ، ونقلْتَ ما فى السَّطر التحتانى إلى اليمين بمرتبة ، وإن لم يوجد فضع فوق العلامة وتحتها صفرًا وانقل وهكذا إلى أن يتمّ العملُ ، فما فوق

---

(١) الجذْر بفتح الجيم وكسرها وبسكون الدال المعجمة أصل الشيء .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ .

الجدول هو الجذر ، فإن لم يبق شيء تحت الخطوط الفواصل ، فالعددُ مُنْطَقٌ ، وإن بقى فأصمٌّ ، وتلك البقيّةُ كسرٌ مخرجها ما يحصل من زيادة ما فوق العلامة الأولى مع واحد على التحتانى .

مثاله : أردنا جذر هذا العدد ١٢٨١٧٢ ، عملنا ما قلنا صار هكذا :

	٣		٥		٨
١	٢	٨	١	٧	٢
	٩				
	٣				
	٣	٠			
		٨			
		٢	٥		
		٥	٦		
		٥	٦		
				٦	٤
					٨
			٧	١	٧
			٧	٠	٨
	٣	٦	٥		

وما بقى[1] تحت الخطوط الفواصل ثمانية ، فهى كسر مخرجها الحاصل من زيادة ما فوق العلامة الأولى ، وواحد على التحتانى ، أعنى ٧١٧ .

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ :

والامتحان بضربِ ميزان الخارج فى نفسه ، وزيادة ميزانِ الباقى إن كان على الحاصل ، فميزانُ المجتمع إن خَالَفَ ميزان العدد فالعملُ خطأ ، والله أعلم.

شرح : فى صدر هذا الفصل يعرِّف العاملى الجذر والضلع والشىء . كذا المجذور والمساحة والمال . ويمكن بيان ذلك مُدمَّجًا بالرموز بقصد الإيضاح على الوجه التالى :

		العدد	العدد مضروب فى نفسه
فى المحاسبات	:	الجذر ع	المجذور (الذى يمكن حذره) $ع^2$
فى المساحة	:	الضلع ل	المساحة $ل^2$
فى الجبر والمقابلة	:	الشىء س	المال $س^2$

ويبدأ العاملى بتقديم طريقة تقريبية لإيجاد الجذر العربيعى للعدد الأصم ع الذى يمكن وضعه على الصورة :

$ع = (ن^2 + م)$ حيث $ن^2$ أقرب المجذورات إلى ع
، م الباقى بعد إسقاط $ن^2$ من ع

فطبقًا لمتن المخطوط نحصل على $\sqrt{ع}$ من العلاقة المُقَرَّبة :

$$\sqrt{ع} = (ن + \frac{م}{٢ن + ١})$$ = جذر العدد الأصمّ ع

ويجىء الكلام مرة ثانية عن هذه القاعدة فى القسم الثانى من هذا الكتاب عند تحليلنا لما جاء بكتاب العاملى «الكشكول» .

هذا وقد سبق لأبى بكر محمد بن الحسن الكرخى أن أورد هذه القاعدة فى كتابه «كافى الحساب» الذى ألَّفه بين سنتى ٤٠١ ، ٤٠٧ هـ (١٠١٠ ـ ١٠١٦ م) ، وأهداه إلى الوزير أبى غالب محمد بن خلف الذى اشتهر بلقب «فخر الملك» ،

= ويُنسبُ إلى الكرخى استخراجه لهذه القاعدة بطريقة جبرية ، كذلك وردت قاعدة مُشابهة فى كتاب «تلخيص أعمال الحساب» لابن البنَّا المراكشى الذى عاش فى الفترة من سنة ٦٥٤ هـ إلى سنة ٧٢١ هـ (١٢٥٦ ـ ١٣٢١ م) .

وجدير بالذكر أن البابليين كانوا يستعملون ـ فى استخراج الجذور التربيعية ـ القاعدة التالية :

$$\sqrt{ع} = \sqrt{ن^{٢} + م} = (ن + \frac{م}{٢ ن})$$

وقد وردت هذه القاعدة فى كتابات محمد بن موسى الخوارزمى ، إلا أنها كانت محلاًّ للنقد ، فعدَّلها الرياضيون العرب من بعده لتصبح على النحو التالى :

$$\sqrt{ع} = \sqrt{ن^{٢} + م} = (ن + \frac{م}{٢ ن + ١})$$

وهى نفس الصورة التى أشار إليها العاملى .

ويُنسب إلى أحمد بن إبراهيم الإقليدسى الذى عاش فى القرن العاشر للميلاد أنه لما رأى أن :

المقدار $(ن + \frac{م}{٢ ن})$ ـ حسب قاعدة البابليين ـ يُعطى جذورًا تزيد عن القيم الحقيقية ،

وأن المقدار $(ن + \frac{م}{٢ ن + ١})$ ـ حسب تعديل الرياضيّين العرب ـ يُعطى قيمًا أقل من الحقيقة ،

فقد اقترح قيمة وسطا بينهما على النحو التالى :

$$\sqrt{ع} = \sqrt{ن^{٢} + م} = ن + \frac{١}{٢} \left[\frac{م}{٢ ن} + \frac{م}{٢ ن + ١} \right]$$

الباب الثانى

فى حساب الكسور

وفيه ثلاث مقدّمات وستة فصول

المقدمة الأولى

كل عددين غير الواحد إن تساويا فمتماثلان[1] ، وإلاّ فإن أفنى أقلهما الأكثر فمتداخلان[2] ، وإلاّ فإنْ عَدّهما ثالثٌ فمتوافقان[3] ، والكسرُ الذى هو مخرجه فهو وفقهما ، وإلا فمتباينان[4] ، والتماثل بيِّنٌ ، ويُعرف البواقى بقسمة الأكثر على الأقل ، فإن لم يبق شىءٌ فمتداخلان ، وإن بقى قسّمنا المقسوم عليه على الباقى ، وهكذا إلى أن لا يبقى شىءٌ فالعددان متوافقان ، والمقسوم عليه الأخير هو العادُّ لهما ، أو يبقى واحدٌ فمتباينان .

ثمَّ الكسْرُ إمَّا مُنْطَق ، وهو الكسور التسعة المشهورة ، أو أصمّ ولا يمكن التّعبير عنه إلاّ بالجزء ، وكلٌّ منهما إمّا مُفْرَد كالثّلث ، وجزء من أحد عشر ، أو مكرَّرٌ كالثلثين وجزءين من أحد عشر ، أو مضاف كنصف سدسٍ ، وجزء من أحد عشر من الجزءِ من ثلثة عشر ، أو معطوف كالنّصف والثّلث ، وجزء من أحد عشر ، وجزء من ثلثة عشر ، وإذَا رسَمْتَ الكسر ، فإن كان معه صحيح ، فارسمه فوقه ، والكسر تحته ، فوق المخرج ، وإلا فضع صفرًا مكانه ، وفى المعطوف يرسمون الوَاو .

شرح : (١) العددان المتماثلان هما العددان المتشابهان من كل الوجوه أى المتساويان ، كسبعةٍ وسبعة ، والكسران المتماثلان هما الكسران المتساويان كربع وربع .

(٢) العددان المتداخلان هما العددان المختلفان اللذان يفنى أصغرهُما أكبَرهما ، أو بعبارة أخرى أن يكون العدد الأكبر فيهما قابلاً للقسمة على العدد الأصغر ، مثال ذلك ٨ ، ٢ ، فهما متداخلان حيث إننا إذا انقصنا الاثنين من الثمانية أربع مرات لم يبق =

وفى الأصمّ المضاف من ، فالواحد ، والثلثان هكذا $\begin{matrix}١\\ \frac{٢}{٣}\end{matrix}$ ، ونصف خمسة أسداس هكذا : $\begin{matrix}\frac{١}{٢}\\ \frac{٥}{٦}\end{matrix}$ والـخُـمسان وثلثة أرباع هكذا : $\frac{٢}{٥}$ و $\frac{٣}{٤}$ ، وجزء من أحد عشر من جزءٍ من ثلثة عشر هكذا : $\begin{matrix}\frac{١}{١١}\\ \text{مـن}\\ \frac{١}{١٣}\end{matrix}$ (أو $\frac{١}{١١}$ من $\frac{١}{١٣}$)(*) .

(*) كما فى المخطوط ١٢٥٣ .

منها شىء ، أى أن الاثنين تُفنى الثمانية ، أو بعبارة ثالثة فإنه بقبول الثمانية للقسمة على الاثنين فإن الثمانية تكون مُكوَّنةً من عدد صحيح من الاثنين بحيث إنه بإسقاط اثنين من الثمانية لعدد من المرات يساوى العدد الصحيح الناتج من القسمة فإنه لا يبقى من الثمانية شىء ، فنقول إن الاثنين تُفنى الثمانية ، وبعبارة رابعة يمكننا القول بأنه فى العددين المتداخلين يكون العدد الأصغر أحد عوامل العدد الأكبر أو مجموعة من عوامله مضروبة فى بعضها البعض كالعددين ١٨ ، ٦ ، فعوامل العدد ١٨ هى ٢ ، ٣ ، ٣ ، أى أن ١٨ = ٢ × ٣ × ٣ ، وكذلك العدد ٦ عوامله ٢ ، ٣ ، أى أن ٦ = ٢ × ٣ ، فتكون الستة مجموعة من عاملين من عوامل العدد ١٨ وهما ٢ × ٣ ، ومن الواضح أن ١٨ تقبل القسمة على ٦ وتكون نتيجة القسمة ٣ ، ولو أسقطنا العدد ٦ من العدد ١٨ مرة واحدة يكون الباقى ١٢ ، ومرتين يكون الباقى ٦ ، ومرة ثالثة لا يبقى شىء ، فيُقال إنَّ الستة تُفنى الثمانية عشر ، فهما عددان متداخلان .

(٣) العددان المتوافقان هما العددان اللذان يقبلان القسمة على عدد ثالث ، هو أحد عواملهما بالطبع ، مثال ذلك العددان ٦ ، ٩ فإنهما يقبلان القسمة على ٣ ، وبالتالى فالعدد ٣ عامل مشترك بينهما ، أى أحد العوامل الأولية (الأضلاع) لكل منهما .

(٤) العددان المتباينان هما العددان المختلفان اللذان لا يشتركان فى عامل من عواملهما الأولية ، وبالتالى ليس لهما عامل مشترك إلاّ الواحد ، مثال ذلك العددان ١٣ ، ١٩ .

مخرجُ الكسْرِ أقلُّ عَدَدٍ يصحُّ منه ذلك الكسر ، فمخرجُ المُفرد ظاهر ، وهو بعينه مخرج المكرّر . ومخرجُ المضاف مضروبُ مخارج مُفرداته بعضها فى بعضٍ ، أمّا المعطوفُ فاعتبر مخرجى كسْرَين منه ، فإن تباينا . فاضرب أحدَهما فى الآخر ، أوْ توافقا فاضرب وفْقَ أحدِهما فى الآخر ، أو تداخلا فاكتف بالأكثر . ثمّ اعتبر الحاصلَ مع مخرَج الكسْر الثالث . واعمل ماعرفت وهكذا وهكذا[1] ، فالحاصل هو المطلوبُ . ففى تحصيل مخرج الكسور التسعة تضرب الاثنين فى الثّلثة للتباين ، والحاصلَ فى نصف الأربعة للتّوافق ، والحاصل فى الخمسة للتّباين ، والستة داخلة فى الحاصل فاكتف به ، واضربه فى السّبعة للمباينة . والحاصل فى ربع الثمانية . والحاصل فى ثلث التسعة للتّوافق ، والعشرة داخلة فى الحاصل ، وهو ألفان وخمسمائة وعشرون فاكتف به وهو المطلوب[2] .

تتمّـة :

ولك أن تعتبر مخارج مفرداته . فما كان منها داخلاً فى غيره فأسقطه واكتف بالأكثر . وماكان متوافقًا فاستبدل به وفقه ، واعمَلْ بالوفق . كذلك ليئول المخارج الباقية إلى التّباين ، فاضرب بعضها فى بعض ، والحاصل هو المطلوب .

ففى المثال تسقطُ الاثنين . والثّلاثة والأربعة والخمسة لدخولها فى البواقى . والستّة تُوافِق الثّمانية بالنّصف . فاستبدل بها نصفها ، وهو داخل فى التّسعة فأسقطه ، والثّمانية توافق العشرة بالنّصف ، فاضرب خمسة فى الثمانية ، والحاصل فى السّبعة ، والحاصل فى التّسعة ليخرج المطلوب .

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) راجع الشرح فى نهاية المقدمة .

لطيفـة :

يحصلُ مخرجُ الكسور التسعة من ضرب أيَّام الشهر فى عدَّة الشُّهُور. والحاصل فى أيام الأسبوع . ومن ضرب مخارج الكسور التى فيها حرفُ العين بعضها فى بعض . وسُئِل أميرُ المؤمنين علىٌّ رضى الله عنه . عن[1] ذلك . فقال اضرب أيَّام أسبوعِك فى أيَّام سنتك[2] .

---

(١) فى المخطوط ٧٥٣ : من .

شرح : (٢) فى هذه «اللطيفة» يعرض العاملى لإيجاد مخرج الكسور التسعة ، أى لإيجاد القاسم المشترك الأصغر لهذه الكسور التسعة ، ولنبين أولاً المقصود بإيجاد القاسم المشترك الأصغر ، فنفرض أن المطلوب مثلاً هو جمع الكسرين $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، فنبدأ بتوحيد مخرجى الكسرين بأن نُحوِّل كلاً من الكسرين إلى كسر مخرجه (أى مقامه) ستة (أى ٢ × ٣ حاصل ضرب مخرجى الكسرين) ، فيصير الكسران : $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٢}{٦}$ ، وفى هذه الحالة يتيسر الجمع فتكون النتيجة $\frac{٥}{٦}$ ، وعملية توحيد مخرجى الكسرين تقتضى إيجاد ما نسميه بالقاسم المشترك وهو حاصل ضرب المخرجين فى صورته العامة ، إلاَّ أنه مع تعدُّد الكسور وبالتالى تعدُّد مخارجها فإن إيجاد القاسم المشترك بهذه الكيفية ـ على بساطتها ـ لا يعطينا أصغر قاسم مشترك ، ولنوضح ذلك بمثال فنقول إن المطلوب مثلاً هو حاصل جمع الكسور $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، فمن الميسور أن نقول إن القاسم المشترك هو حاصل ضرب المخارج الأربعة بعضها فى بعض هكذا : ٢ × ٦ × ٨ × ٩ ، إلاَّ أن هناك قاسمًا مشتركًا أصغر من هذا القاسم ، وبالتالى فإن إيجاده يؤدى إلى تبسيط أكثر للعمليات الخاصة بالكسور ، ولذلك نقول إن المخارج الأربعة هى على التوالى :

٢ ، ٢ × ٣ ، $٢^{٣}$ ، $٣^{٢}$.

ولذلك فإن القاسم المشترك الأصغر يكون حاصل ضرب الأعداد الأولية مرفوعة إلى أعلى قوة لها ، فنجد مثلاً أن الاثنين فى المخرجين الأوَّلَين موجودة فى المخرج الثالث فيمكن الاكتفاء به عن العامل الأوَّلى ٢ ، كذلك فإن الثلاثة فى المخرج الثانى موجودة ضمن المخرج الرابع ، وبالتالى يمكن الاكتفاء بالمخرج الرابع فيما يخص العامل =

= الأوّلى ٣ . وبذلك يكون القاسم المشترك الأصغر هو : $٢^٣ \times ٣^٢$ ، أى ٨ × ٩ = ٧٢ ، وهو أبسط بكثير مما لو ضربنا جميع المخارج فى بعضها البعض : ٢ × ٦ × ٨ × ٩ = ١٢ × ٧٢ ، فى الوقت الذى يؤدى فيه القاسم المشترك الأصغر الغرض ، وهو توحيد مخارج الكسور حتى يتسنىّ إجراء عمليتى الجمع والطرح .

بعد هذه المقدمة نعرج إلى إيجاد مخرج الكسور التسعة ، فنقول إن الكسور التسعة المقصودة هى : $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{١٠}$

وبإمعان النظر فى مخارج هذه الكسور التسعة نجد أن المخرج ٨ يكفينا بالنسبة للعامل الأوّلى ٢ . كما أن المخرج ٩ يكفينا أيضًا بالنسبة للعامل الأولى ٣ . كذلك فالمخرجان ٥ ، ٧ يمثلان العاملين الأولين ٥ ، ٧ . وبذلك يكون مخرج الكسور التسعة (أى القاسم المشترك الأصغر) هو :

٨ × ٩ × ٥ × ٧ = ٣٦٠ × ٧ = ٢٥٢٠

أى أن مخرج الكسور التسعة هو : ٣٠ × ١٢ × ٧

أى : «عدد أيام الشهر × عِدّة الشهور (عدد الشهور فى السنة) × عدد أيام الأسبوع» وهى القاعدة التى وردت فى «لطيفة» العاملى .

وكذلك فقول أمير المؤمنين عَلىٍّ كَرَّم الله وجهه عن مخرج الكسور التسعة : «اضرب أيّامَ أسبوعِك فى أيّامِ سَنَتِك» قول غاية فى الصحة (٧ × ٣٦٠) .

ورد أيضًا فى «لطيفة» العاملى أنَّ مخرج الكسور التسعة يحصل من ضرب مخارج الكسور التى فيها حرف العين بعضها فى بعض . وهو قول صحيحٌ أيضًا . حيث إن الكسور التى فيها حرف العين هى : الرُّبع ، والسُّبع ، والتُّسع ، والعُشْر ، وحاصل ضرب مخارج هذه الكسور الأربعة هو : ٤ × ٧ × ٩ × ١٠ = ٣٦٠ × ٧ . من هذا تتبين صِحَّة ما جاء فى هذه «اللطيفة» .

المقدمة الثالثة

فى التجنيس والرَّفع

أمَّا التَّجنيسُ فجعلُ الصحيح كُسُورًا من جنسِ كسْرٍ مُعَيَّن ، والعملُ فيه إذا كانَ مع الصحيح كسرٌ أنْ تضرِبَ الصَّحيحَ فى مخرجِ الكسْر ، وتَزيد عليه صورة الكسْرِ ، فمجنَّسُ الاثنين والرُّبعِ تِسْعَةٌ ، ومجنَّسُ السَّتَّةِ وثلَاثةِ أخماسٍ ثلَاثةٌ وثلثون ، ومجنَّسُ الأربعةِ وثُلُثِ سُبْعٍ خمسةٌ وثمانون .

وأمَّا الرَّفعُ فجعْلُ الكسُور صِحاحًا ، فإنْ كان مَعَنا كسرٌ عددُه أكثر من مخرجه قسَمناه على مخرجِه ، فالخارجُ صحيحٌ ، والباقى كسرٌ من ذلك المخرج . فمرفوعُ خمسةِ عشر رُبْعًا[1] ثلَاثةٌ وثلَاثةُ أرباعٍ .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : يُقصد بالتجنيس جعلُ الصحيح والكسرِ المصاحب له من جنس واحد ، وذلك بالتعبير عنهما على هيئة كسرين لهما نفس مَخْرج الكسر ، ويسوق العاملى ثلاثة أمثلة لذلك نبيّنها مشروحة فيما يلى :

$$\frac{٩}{٤} = \frac{٨}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٤}{٤} \times ٢ + \frac{١}{٤} = ٢\,\frac{١}{٤}$$

فيكون المجَنَّس تسعة ، وهو عدد الكسر $\frac{٩}{٤}$ الذى مخرجه ٤ ، وهو نفسه مخرج الكسر $\frac{١}{٤}$.

كذلك $\frac{٣٣}{٥} = \frac{٣٠}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٥}{٥} \times ٦ + \frac{٣}{٥} = ٦\,\frac{٣}{٥}$

فالمجنّس هنا ٣٣ .

وفى المثال الثالث : $\frac{٢١}{٢١} \times ٤ + \frac{١}{٢١} = ٤\,\frac{١}{٧} \,.\, \frac{١}{٣}$

$= \frac{٨٥}{٢١} = \frac{٨٤}{٢١} + \frac{١}{٢١}$ فالمجنس ٨٥ .

أمّا الرفع فهو تحويل الكسر الذى يزيد فيه عدده (أى بسطه) على مخرجه إلى عدد صحيح وكسر . ويورد العاملى لذلك مثالا هو :

$\frac{١٥}{٤} = \frac{١٢}{٤} + \frac{٣}{٤} = ٣\,\frac{٣}{٤}$ وهو المرفوع .

الفصل الأول

فى جمع الكسور وتضعيفها

يُؤخذُ من المخرج المشتركِ مجموعُها أو مُضَعّفُها ، ويُقْسَم عددُها إن زاد عليه[1] ، فالخارجُ صحاحٌ والباقى كسورٌ منه ، وإن نقص عنه نسِبَ إليه ، وإنْ ساواه فالحاصل وَاحدٌ ، فالنّصفُ والثّلثُ والرُّبعُ واحدٌ ونصفُ سُدسٍ ، والسّدسُ والثّلُثُ نصفٌ ، والنّصفُ والسّدسُ والثّلُثُ واحدٌ ، وضِعْفُ ثلثة أخماسٍ واحدٌ وخمسٌ .

الفصل الثانى

فى تنصيف الكسور وتفريقها

أمّا التّنصيفُ فإنْ كان الكسرُ زوجًا نَصّفته ، أو فردًا ضعّفت المخرج ، ونسبْتَ الكسر[2] إليه وهو ظاهرٌ .

وأمّا التّفريقُ فتنقص أحدَهما من الآخر بعد أخذهما من المخرج المشترك ، وتنسبَ الباقى إليه ، فإنْ نقصتَ الرُّبعَ من الثّلث بقى نصفُ سُدُسٍ .

الفصل الثالث

فى ضــرب الكســور

إن كان الكسْر فى أحد الطرفين فقط مع صحيح أوْ بدونه ، فاضْرب المجنّسَ أو صورةَ الكسْرِ فى الصحيح ، ثمّ اقسم الحاصِلَ على المخرج أو انسبه منه ، ففى ضرب اثنين وثلثة أخماسٍ فى أربعةٍ ، المجنّس فى الصحيح ، اثنان وخمسون ، قسمناه على خمسةٍ ، خرجَ عشرةٌ وخُمسان ، وفى ضرب ثلثة أرباعٍ فى سْبعةٍ ، قسمنا أحدًا وعشرين على أربعةٍ خرج خمسةٌ وربعٌ ، وهو المطلوب . وإن كان الكسْر فى كلا

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : الكسور .

الطرفين والصحيح معهما ، أو مع أحدهما أو لا ، فاضرب المجنّس فى المجنّس ، أو فى صورة الكسْرِ ، أو الصورةَ فى الصورةِ ، وهو الحاصل الأول ، ثم المخرجَ فى المخرجِ وهو الحاصلُ الثانى ، فاقسم الأوّلَ عليه ، أو انسبه منه ، فالخارجُ هو المطلوبُ ، فالحاصلُ من ضرب الاثنين ونصفٍ ، فى ثلثةٍ وثُلثٍ ، ثمانيةٌ وثُلُثٌ ، ومن اثنين ورُبْعٍ فى خمسة أسداسٍ ، واحدٌ وسبعةُ أثمانٍ ، ومن ثلثة أرْبَاعٍ فى خمسة أسباعٍ ، نِصْفٌ وربعُ سبعٍ .

الفصل الرابع
فى قسمة الكسور

وهى ثمانيةُ أصناف كما يشهد به التأمُّلُ ، والعملُ فيها أن تضربَ كلاًّ من المقسومِ عليه فى المخرجِ المشتركِ ، إن كان مع كلّ منهما كسْرٌ ، أو فى المخرجِ الموجودِ إنْ كان أحدهما فقط ذاكسرٍ ، ثمّ تقسم حاصل المقسوم على حاصل المقسوم عليه أو تنسبه منه ، فالخارجُ من قسمةِ خمسةٍ ورُبْعٍ على ثلثةٍ ، واحدٌ وثلثةُ أرباعٍ ، وبالعكس أربعةُ أسباعٍ ، ومن السّدسين على السّدس ، اثنان ، كما يشهد به تعريفُ القسمة بما مرَّ ، وعليك استخراج باقى الأمثلة .

الفصل الخامس
فى استخراج جذر الكسور

إن كان مع الكسْر صحيحٌ ، جنِّس ليرجع الكل كسورًا ، ثمَّ إن كان الكسرُ والمخرجُ مُنطقَين ، قسمتَ جذر الكسْرِ على جذرِ المخرج ، أو نَسَبْتَه مِنه ، فجذرُ ستّةٍ ورُبْعٍ اثنان ونصفٌ ، وجذرُ أربعةِ أتساعٍ ثُلثان .

وإن لم يكونا مُنْطَقَين ضَربْتَ الكسرَ فى المخرجِ ، وأخَذْتَ جذرَ الحاصل بالتقريب وقسمته على المخرج ، فنى تجذير ثلثةٍ ونصفٍ ، تضرب سبعةً فى اثنين ، وتأخذَ جذرَ الحاصِلِ بالتّقريب ، وهو ثلثةٌ وخمسةُ أسباعٍ ، وتقسِمَهُ على اثنين ليخرجَ واحدٌ وستّةُ أسباع .

الفصل السادس

فى تحويل الكسر من مخرج إلى مخرج

اضرب عدَدَ الكسر فى المخرج المُحوَّلِ إليه ، واقسم الحاصِلَ على مخرَجه . فالخارجُ هو الكسْرُ المطلوب . من مخرج المحوَّلِ إليه . فلو قيل خمسة أسبَاع كم ثُمْنًا . قسَمْتَ أربعينَ على سبعةٍ ، خرج خمسةُ أثمانٍ وخمسة أسباع ثمنٍ . ولو قيل كم سُدُسًا ، فالجوابُ أربعةُ أسداسٍ وسُبْعَا سُدُسٍ .

شرح : فى هذه الفصول الستة يعرض العاملى لحساب الكسور من جمع وتضعيف وتنصيف وتفريق وضرب وقسمة واستخراج جذور وتحويل الكسر من مخرج إلى مخرج .

وتقوم هذه العمليات الحسابية على فكرة إيجاد المخرج المشترك . وفيما يلى نسوق بعض الأمثلة التى أوردها العاملى للتدليل على القواعد التى ذكرها فى متن كتابه :

$١\frac{١}{٦} . \frac{١}{٢} = \frac{٣}{١٢} + \frac{٤}{١٢} + \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}$ (١)

$\frac{١}{٦} . \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٢} = \frac{٣}{١٢} - \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٣}$ (٢)

$٨\frac{١}{٣} = \frac{٢٥}{٣} = \frac{١٠}{٣} \times \frac{٥}{٢} = ٣\frac{١}{٣} \times ٢\frac{١}{٢}$ (٣)

$١\frac{٧}{٨} = \frac{١٥}{٨} = \frac{٥}{٦} \times \frac{٩}{٤} = \frac{٥}{٦} \times ٢\frac{١}{٤}$

$١\frac{٣}{٤} = \frac{٢١}{١٢} = ٣ \div \frac{٢١}{٤} = ٣ \div ٥\frac{١}{٤}$ (٤)

$١\frac{٦}{٧} \quad \frac{\overset{٥}{٣} \ldots ٧.}{٢} \quad \frac{\sqrt{١٤}}{٢} . \sqrt{\frac{١٤}{٤}} = \sqrt{\frac{٧}{٢}} - \sqrt{٣\frac{١}{٢}} \quad , \quad ٢\frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢} = \sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \sqrt{٦\frac{١}{٤}}$ (٥)

$٥\frac{٥}{٧}$ ثمنًا $= \frac{١}{٨} \times = \frac{٥ \times ٨}{٧ \times ٨} = \frac{٥}{٧}$ (٦)

$٤\frac{٢}{٧}$ سدساً $= \frac{١}{٦} \times \frac{٣٠}{٧} = \frac{٥ \times ٦}{٧ \times ٦} = \frac{٥}{٧}$

الباب الثالث

فى استخراج المجهولات بالأربعة المتناسبة

وهى مانسبةُ أوّلها إلى ثانيها كنسبة ثالثها إلى رابعها ، ويلزمها مساواة مُسطَّح[1] الطرفين لمسطَّحِ الوسطيْن كما بُرهن عليه ، فإذا جُهِلَ أحدُ الطرفين ، فاقسم مسطَّحَ الوسطين على الطّرفِ المعلومِ ، أو أحد الوَسَطيْن ، فاقسم مسطّح الطرفين على الوسط المعلوم ، فالخارجُ هو المطلوب .

والسؤال إمّا أن يتعلّق بالزيادة والنقصان ، أو بالمعاملات ونحوها ، فالأوّل نحو أىّ عدد إذا زيد عليه رُبْعُه صار ثلثةً مثلاً ، فالطريق أن تأخذَ مخرّجَ الكسْرِ ، ويسمى المأخذ ، وتتصرّف فيه بِحَسَب السّؤالِ ، فما انتهيت إليه يُسمَّى الواسطة ، فيحصل مَعَك معلومات ثلث المأخذ والواسطة والمعلوم ، وهو ما أعطاه السائل بقوله صار كذا ، ونسبةُ المأخذ وهو الأوّلُ ، إلى الواسطةِ وهى الثانى ، كنسبة المجهولِ وهو الثالثُ ، إلى المعلومِ وهو الرابعْ ، فاضرب المأخَذَ فى المعلوم ، واقسم الحاصِلَ على الواسطةِ ، ليخرجَ المجهولُ ، فهو فى المثال اثنان وخُمْسان ، وأمّا الثانى فكما لو قيل خمسةُ أرْطَالِ بثلثة دراهم ، رطلان بكم ، فخمسةُ أرطالِ المسعَّرُ ، والثّلثة السِّعْر ، والرّطلان المثمّنْ ، والمسئولُ عنه الثّمنْ ، ونسبةُ المُسعَّرِ إلى السِّعرِ كنسبة المثمَّن إلى الثّمنِ ، فالمجهولُ الرَّابعْ ، فاقسم مُسَطَّحَ الوسطَيْنِ وهو ستّةٌ ، على الأوّلِ وهو خمسةٌ .

ولو قيل كم رطلاً بدرهَميْن ، فالمجهولْ المثمَّنْ وهو الثالث ، فاقسم مسطَّحَ الطرفين وهو عشرةٌ ، على الثانى وهو ثلثةٌ ، ومن هنا أخِذَ قولهم يُضْرَب آخرْ السؤال فى غير جِنْسِه ، ويُقسمُ الحاصلُ على جِنْسِه ، وهذا بابٌ عظيمُ النّفعِ فاحفظ به .

---

(١) يقصد بالمسطح حاصل الضرب .

شرح : إذا رمزنا للمقادير الأربعة المتناسبة بالرموز : ا ، ب ، حـ ، د ، فإنه طبقًا للتعريف الوارد يكون :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \text{ ، أى أن } \frac{\text{الأول}}{\text{الثانى}} = \frac{\text{الثالث}}{\text{الرابع}}$$

ويُسمَّى الرمزان أ ، د الطرفين . والرمزان ب ، حـ الوسطين ، ولمَّا كان مُسطَّحُ (أى حاصل ضرب) الطرفين مساويًا لمسطح الوسطين ، فإنَّ :

أ × د = ب × حـ   أى أن : الأول × الرابع = الثانى × الثالث .

وبمعرفة ثلاثة من هذه المقادير الأربعة المتناسبة يمكن استخراج المقدار المجهول باستخدام هذه العلاقة .

ولقد ساق العاملى أمثلة ثلاثة نُبيِّنها فيما يلى :

المثال الأول : ماهو العدد الذى إذا أُضيف إليه رُبْعُه أصبح ثلاثةً ؟ يُحدد العاملى طريق الحل فيقول :

يؤخذ مخرج الكسر ـ وهو ٤ ـ ويُسمى « المأخذ » ، ويُتصرَّف فيه بحسب السؤال ـ أى يُضاف إليه رُبْعُه ـ فيصبح ٥ ، ويُسميه العاملى « الواسطة » .

فنحصل على معلومات ثلاث هى :

المأخذ = ٤

الواسطة = ٥

المعلوم = ٣   (ما أعطاه السائل)

ويضع العاملى معادلته على الوجه التالى :

$$\frac{\text{المأخذ}}{\text{الواسطة}} = \frac{\text{المجهول}}{\text{المعلوم}}$$

وبالتعويض فى هذه المعادلة ، نجد أن : $\frac{٤}{٥} = \frac{\text{المجهول}}{٣}$ =

فيكون العدد المطلوب هو : $\frac{٤ \times ٣}{٥} = \frac{١٢}{٥} = ٢\frac{٢}{٥}$

وبتحليل هذا المثال يمكننا أن نطرق الحل على الوجه التالى :

$١\frac{١}{٤} \times$ العدد المجهول = ٣

أى أن $\frac{٥}{٤} \times$ المجهول = المعلوم

وباستخدام تعبيرات العاملى تكون المعادلة كما يلى :

$$\frac{\text{الواسطة}}{\text{المأخذ}} \times \text{المجهول} = \text{المعلوم}$$

أى أن المجهول = $\frac{\text{المأخذ} \times \text{المعلوم}}{\text{الواسطة}}$ ، وهو ماورد فى المثال

المثال الثانى : ٥ أرطال بثلاثة دراهم . رطلان بكم ؟

الأرطال الخمسة	:	المُسَعَّر
والدراهم الثلاثة تسمى	:	السِّعر
والرطلان يُسميان	:	المُثمَّن
والمسئول عنه هو	:	الثَّمن

والقاعدة هى : $\frac{\text{المسعَّر}}{\text{السِّعر}} = \frac{\text{المثمَّن}}{\text{الثَّمن}}$

فالتعويض نجد أن : $\frac{٥}{٣} = \frac{٢}{\text{الثمن}}$

فيكون الثمن = $\frac{٢ \times ٣}{٥} = \frac{٦}{٥} = ١\frac{١}{٥}$ درهماً

ومن الواضح أنَّ نسبة السِّعْر إلى المُسَعَّر ماهى إلا قيمة الوَحدة ، فهى فى المثال قيمة الرطل بالدراهم .

المثال الثالث : ٥ أرطال بثلاثة دراهم ، كم رطلا بدرهمين ؟ فالمجهول هنا «المُثمَّن» . فتكون المعادلة على النحو التالى :

$$\frac{٥}{٣} = \frac{\text{المثمن (المجهول)}}{٢}$$

فيكون المُثمَّن = $\frac{٥ \times ٢}{٣} = \frac{١٠}{٣} = ٣\frac{١}{٣}$ رطلا .

الباب الرابع

فى استخراج المجهولات بحساب الخطأين

تفرض المجهولَ ما شئت ، وتسمِّيه المفروضَ الأوّلَ ، وتتصرَّف فيه بحسب السّؤال ، فإن طَابَق فهو المطلوبُ ، وإنْ أخطأَ بزيادةٍ أو نُقصانٍ فهو الخطأُ الأوّل ، ثُمَّ تفرض آخَرَ وهو المفروضُ الثانى ، فإن أخطأَ حصل الخطأُ الثانى ، ثمّ اضْرب المفروضَ الأوّلَ فى الخطأِ الثّانى ، وتسمِّيه المحفوظَ الأوَّلَ ، والمفروضَ الثانى فى الخطأِ الأوَّلِ ، وهو المحفوظُ الثانى ، فإنْ كانَ الخطآن زائدَيْن أو ناقصَيْن ، فاقسم الفَضْل بينَ المحفوظين على الفضْلِ بين الخطأينْ ، وإنْ اختلفا فمجموعُ المحفوظين على مجموع الخطأين ليَخرُجَ المجهولُ .

فلو قيل أىُّ عدد زِيدَ عليه ثُلثاه ودرهمٌ حصل عشرةٌ ، فإنْ فَرَضْته تسعةً فالخطأُ الأوّلْ ستّةٌ زائدةٌ ، أو ستةً فالخطأُ الثانى واحدٌ زايدٌ ، فالمحفوظُ الأوّل تسعةٌ ، والثانى ستَّة وثلاثون ، والخارجْ من قسمةِ الفضْلِ بينهما على الفَضْلِ بين الخطأين ، خمسةٌ وخُمْسان وهو المطلوب .

ولوْ قيلَ أىّ عدد زيدَ عليه رُبْعُه ، وعلى الحاصِل ثَلثة أخماسه[1] ، ونُقِصَ من[2] المجتمِعِ خمسة دراهم ، عاد الأوَّلُ . فلو فرضْته أربعةً ، أخطأت بواحدٍ ناقصٍ[3] ، أو ثمانيةً فبثلاثةٍ زائدةٍ ، وخارجُ قسمةِ مجموع المحفوظين [على مجموع الخطأين][4] خمسةٌ ، وهو المطلوب .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : أخماس .

(٢) فى المخطوط ٧٥٣ : فى .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) اضيفت ليكتمل المعنى حسب النص .

شرح : فى هذه الطريقة ـ أعنى استخراج المجهولات بحساب الخطأين ـ يجرى العمل على النحو التالى :

١ ـ تفرض أية قيمة للمجهول وتسميها المفروض الأول .

٢ ـ تعوض هذه القيمة الفرضية فى المسألة فإن طابقت كان المفروض الأول هو الإجابة المطلوبة ، وإلا فاحسب الخطأ الناشئ عن المفروض الأول . ولتُسَمّ هذا الخطأ بالخطأ الأول .

٣ ـ تكرر الخطوتان السابقتان لقيمة ثانية للمجهول ، ولنسميها المفروض الثانى ، ولنحسب الخطأ الثانى .

٤ ـ اضرب المفروض الأول فى الخطأ ، وسمِّه المحفوظ الأول .

٥ ـ اضرب المفروض الثانى فى الخطأ الأول . وسمه المحفوظ الثانى .

٦ ـ إن كان الخطآن الأول والثانى متحدى الإشارة (إما الاثنان زائدين . أو الاثنان ناقصين) ، فاقسم الفرق بين المحفوظين على الفرق بين الخطأين تحصل على قيمة المجهول .

٧ ـ إن كان الخطآن الأول والثانى مختلفى الإشارة ، فاقسم مجموع المحفوظين على مجموع الخطأين تخرج قيمة المجهول .

ولبيان صحة هذه الطريقة ، نفرض أن المسألة يمكن تمثيلها بالمعادلة الآتية :

$$ب\ س + حـ = صفرًا \qquad (١)$$

نفرض القيمة العددية $ف_١$ للمجهول س (فتكون $ف_١$ هى المفروض الأول) . وتعوض $ف_١$ فى المعادلة (١)

$$\therefore\ ب\ ف_١ + حـ = خ_١ \qquad (٢)$$

حيث $خ_١$ الخطأ الأول

نكرر العمل لقيمة عددية فرضية ثانية $ف_٢$

$$\therefore\ ب\ ف_٢ + حـ = خ_٢ \qquad (٣)$$

بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (٢) نحصل على :

$$ب\ (ف_١ - ف_٢) = خ_١ - خ_٢$$

$$\text{أى أن } ب = \frac{خ_١ - خ_٢}{ف_١ - ف_٢} \qquad (٤)$$

وبالتعويض بقيمة ب فى المعادلة (٣) نجد أن :

$$حـ = \frac{ف_١ خ_٢ - ف_٢ خ_١}{ف_١ - ف_٢} \qquad (٥)$$

وبالتعويض بقيمتى ب ، حـ (من المعادلتين ٤ ، ٥) فى المعادلة (١) نحصل على قيمة المجهول س :

$$س = \frac{حـ}{ب} = \frac{ف_١ خ_٢ - ف_٢ خ_١}{خ_٢ - خ_١}$$

$$\text{أى أن } س = \frac{\text{المفروض الأول} \times \text{الخطأ الثانى} - \text{المفروض الثانى} \times \text{الخطأ الأول}}{\text{الخطأ الثانى} - \text{الخطأ الأول}}$$

وعند اختلاف الخطأين فى الإشارة ـ تنقلب الإشارتان السالبتان فى الصورة (البسط) والمخرج (المقام) إلى إشارتين موجبتين.

فى المثال الأول الذى ساقه العاملى لشرح هذه الطريقة المطلوب إيجاد عدد إذا أضيف إليه ثلثاه ودرهم حصل عشرة.

فبالمفروض الأول $ف_١ = ٩$ ، يكون المجموع $٩ + \frac{٢}{٣} \times ٩ + ١ = ١٦$

والمطلوب أن يكون عشرة فقط ، فيكون الخطأ الأول $خ_١ = +٦$

وبالمفروض الثانى $ف_٢ = ٦$ ، يصبح المجموع $٦ + \frac{٢}{٣} \times ٦ + ١ = ١١$

فالخطأ الثانى $خ_٢ = +١$

∴ المحفوظ الأول = المفروض الأول $ف_1$ × الخطأ الثانى $خ_2$

= ٩ × ١ = ٩

والمحفوظ الثانى = المفروض الثانى $ف_2$ × الخطأ الأول $خ_1$

= ٦ × ٦ = ٣٦

وبذلك فالعدد المطلوب إيجاده = $\frac{٣٦ - ٩}{٦ - ١}$ = $\frac{٢٧}{٥}$ = ٥ $\frac{٢}{٥}$ درهما

أما فى المثال الثانى :

فبالمفروض الأول $ف_1$ = ٤ ، يكون الخطأ الأول $خ_1$ = − ١

وبالمفروض الثانى $ف_2$ = ٨ ، ينتج الخطأ $خ_2$ = + ٣

∴ العدد المطلوب إيجاده = $\frac{٤ \times ٣ + ٨ \times ١}{٣ + ١}$ = ٥ دراهم

وجدير بالذكر أن طريقة «حساب الخطأين» كانت معروفة منذ بدء الحضارة العربية ، وقد كتبت فيها كتب ورسائل عديدة ، منها مؤلفات قسطا بن لوقا وأبى كامل شجاع بن أسلم الحاسب المصرى (القرن التاسع الميلادى) ، وأبى يوسف يعقوب بن محمد الرازى وأبى يوسف يعقوب بن محمد المعيصى (من علماء القرن العاشر للميلاد) ، وأبى الحسن أبى المعالى الدسكرى المنجم ، والحسن بن الهيثم (٩٦٦ − ١٠٣٩ م) ، وكمال الدين بن يونس (١١٥٦ − ١٢٤٢ م) ؛ وذلك على سبيل المثال لا الحصر .

الباب الخامس

فى استخراج المجهولات بالعمل بالعكس

وقد يُسمَّى بالتّحليلِ والتّعاكسِ ، وهو العملُ بعكْسِ ما أعطاه السَّائِلُ . فإنْ ضعَّف فنصِّف ، أو زَادَ فانْقُصْ ، أو ضَرَب فاقسِمْ . أو جَذَّرَ فَرَبِّعْ ، أو عكَسَ فاعْكس ، مُبْتديًا من آخرِ السُّؤال ليَخرُجَ الجوابُ .

فَلوْ قِيل أىُّ عَدَدٍ ضُرِبَ فى نفسه ، وزيدَ على الحاصل اثنان ، وضُعِّف وزيدَ على الحاصل ثلاثةُ دراهم ، وقُسِمَ المجتمِعُ[1] على خمسةٍ ، وضُرب الخارجُ فى عشرةٍ حصل خمسون ، فاقْسِمها على العشرةِ ، واضرب الخمسةَ فى مثلها وانقص من الحاصل ثلاثةً ، ومن منَصَّف الاثنين والعشرين اثنين ، وجَذْرُ التّسعةِ جوابٌ .

ولوْقيل أىُّ عددٍ زيدَ عليه نِصْفُه وأربعةُ دراهم ، وعلى الحاصل كذلك بَلَغ عشرين ، فانقُصْ الأربَعة ثُمَّ ثُلُثَ السّتّة عشر ، لأَنَّهُ النّصف[2] المزيد ، يبقى عشرةٌ وثلثان ، ثمّ انقص منه أربعةً ، ومن الباقى ثلثه يبقى أربعةٌ ، وأربعةُ أتْساعٍ ، وهو الجوابُ .

---

(١) « المجموع » فى المخطوط ٧٥٣ .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : بالنصف .

شرح : فى هذه الطريقة يبدأ الحل من نهاية المسألة ، وتجرى الخطوات بعكس مايرد فى منطوق المسألة حتى نصل بالتسلسل إلى قيمة المجهول .

= **المثال الأول :**

فى هذا المثال تنتهى المسألة بالعدد ٥٠ فهو نقطة البداية ، وحيث إنه نتج من ضرب عددٍ قبله فى ١٠ . فيكون العدد السابق على ال ٥٠ هو $\frac{٥٠}{١٠}$ ، وحيث إن هذا نتج من قسمةٍ سابقةٍ على العدد ٥ ، فالأصل إذن $\frac{٥٠}{١٠} \times ٥$ ، ولما كان قد زيد عليه ٣ . فأصله ٢٥ − ٣ = ٢٢ ، وحيث إنه ضِعْف العدد السابق عليه ، فمنشؤه $\frac{٢٢}{٢}$ = ١١ ، وهذا مُزاد عليه ٢ ، فأصله ٩ . وهو حاصل ضرب العدد الأصلى فى نفسه ، فالمجهول إذن جَذْر ٩ ، أى ٣ وهو العدد المطلوب .

المثال الثانى :

لما كان العدد ٢٠ درهمًا هو العدد الذى تؤول إليه المسألة فى النهاية . ولما كان قد زيد عليه ٤ دراهم ، فلنبدأ بطرحها ليصير ١٦ درهمًا ، وهذا فى حد ذاته مُزادٌ عليه نصفه ، فيكون أصله $\frac{٢}{٣}$ × ١٦ = $\frac{٢}{٣}$ ١٠ ، ثم يُنقص منه ٤ ليصبح $\frac{٢}{٣}$ ٦ . وهذا قد سبق وأن زيد عليه نصفه ـ كما هو وارد فى منطوق المسألة ـ فيكون أصله $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٢}{٣}$ ٦ . أى $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٢٠}{٣}$ = $\frac{٤٠}{٩}$ = $\frac{٤}{٩}$ ٤ ، فهو إذن العدد الأصلى المطلوب .

الباب السادس

فى المساحة

وفيه مقدمة وثلثة فصول .

مقــدّمــة

المساحةُ استعلامُ ما فى الكمِّ المتَّصلِ القارِّ من أمثالِ الواحد الخطِّى أوْ أبْعَاضِه ، مثلَ شِبْرٍ ونِصْفَ شِبْرٍ أوْ كلَيْهِما إن كان خطًّا ، أوْ أمثال مُربَّعه كذلك إن كان سَطْحًا ، أو أمثال مُكعّبهِ كذلك إن كان جِسْمًا .

فالخطُّ ذو الامتدادِ الواحد ، فمنه مستقيمٌ وهو أقصرُ الخطوط[1] الواصلةِ بين نقطتين ، وهو المرادُ إذَا أُطْلِق ، (فالخط ذو الامتداد)[2] وأسماؤه العشرةُ مشهورةٌ ، ولا يحيط مع مثله بسطحٍ ، وغيرُ المستقيم منه بركاريّ وهو معروفٌ ، وغير بركاريّ ، ولا بحث لنا عنه .

والسَّطحُ ذو الامتدادَيْن فقط ومستويه هو[3] ما يقع الخطوط المخرجة عليه ، فى أى جهةٍ عليه ، فإن أحاط به واحدٌ بركاريٌّ فدائرةٌ ، والخطُّ المنصِّفُ لها قطرٌ ، وغير المُنصِّف وَترٌ لكلٍّ من القوْسين ، وقاعدةٌ لكلٍّ من القطعَتَيْن ، أو قوسٌ من دائرةٍ ونصفا قطرها ملتقيَيْن عند مركزها فَقَطاعٌ ، وهو أكبر أو أصغر ، أو قوْسان تحديبتهما إلى جهة غير أعظم من نصفى دائرتين فهلاليّ ، أو أعظَمَ فَنعْليّ ، أو مختلفى

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

التّحديبِ متساويان ، كلٌّ أصغر من النّصف فاهليلجىّ ، أو أعظم فشلجمىّ ، أو ثلثة مستقيمة ، فمثلّث متساوى الأضلاع أو السّاقين ، أو مختلفها ، قايم الزّاوية ومنفرجها ، وحادُّ الزّوايا ، أو أربعةٌ متساوية ، فمربّعٌ إن قَامَتْ ، وإلاّ فَمعينٌ ، وغيرُ المتساوية مع تساوى المتقابلين مستطيلٌ إن قامَتْ ، وإلاّ فشبيه المعيّن ، وما عداها منحرفات ، وقد يُخصّ بعضهُا باسم كذى الزّنْقة والزّنقتين ، وقِثّاء[1] ، أو أكثر من أربعة فكثيرُ الأضلاع ، فإنْ تساوت قيل مُخمَّسٌ ومُسدّسٌ وهكذا ، وإلاّ فذو خمسة أضلاع ، وذو ستّة أضلاع وهكذا إلى العشرة فيهما ، ثمّ ذوإحدى عشرة قاعدةً واثنتى عشرة وهكذا فيهما[2] .

وقد يخصّ البعض باسمٍ[2] كالمدرّج والمطبّل[3] ، وذى الشُّرف بضمّ الشّين .

والجسمُ ذو الامتداداتْ الثّلثة ، فإن أحاطه سطحٌ يتساوى جميع[4] [الخطوط][5] الخارجة من داخله إليه فكُرَةٌ ، ومنصِّفُها من الدّواير عظيمة ، وإلاّ فصغيرة ، أوستّة مربّعات متساوية فمكعّب ، أو دائرتان متساويتان متوازيتان ، وسطح واصل بينهما بحيث لو أُديرَ مُستقيمٌ واصلٌ بين محيطيهما عليه ، ماسّهُ بكلِّه فى كلِّ الدّورة فأُسْطوانة ، وهما قاعدتاها ، والواصلُ بين مركزيهما سهمها ، فإنْ كانَ عمودًا على القاعدةِ فالأسطوانةُ قائمةٌ ، وإلاّ فمائلةٌ أو دائرة وسطح صَنَوْبرىّ مرتفع من محيطها متضايقًا إلى نقطةٍ بحيث لو أُدير مستقيمٌ واصلٌ بينهما ، ماسّهُ لِكلِّه فى كلِّ الدورةِ فمخروطٌ قايمٌ أو مائلٌ ، وهى قاعدتهُ والواصلُ بين مركزها والنُّقطة سهمُهُ ، وإنْ قُطِعَ بمستوٍ يوازيها فما يليها منه مخروطٌ ناقصٌ ، وقاعدةُ المخروطِ والأسطوانة إن كانت مُضلَّعةً فكلّ منهما مضلَّعٌ مثلُها ، فهذه أكثر الاصطلاحات المتداولة فى هذا الفن .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : قتّاء .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

(٤) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ و١٢٥٣ .

(٥) غير موجودة فى المخطوطات الثلاثة .

شرح : يتناول العاملى فى الباب السادس من كتابه تعريفَ كُلٍّ من الخطِّ والسطح والجسم ، ويبين أنواعها المختلفة ، وكيفية تكوين الأشكال والأجسام الهندسية .

الأشكال المستوية :

تعرَّض العاملى ـ فى مجال الأشكال الهندسية المستوية ـ للشكل الدائرى ومُتعلِّقات الدائرة من القطر والمركز والوتر والقوس والقطاع ، كذلك عرض العاملى للأشكال المكوَّنة من الأقواس كالأشكال الهلاليَّة والنَّعْليَّة والإهليلجية والشَّلجمية ، ويبين المخطوط ١٧٧٣ صور هذه الأشكال بوضوح (شكلاَ ٧ ، ٨) .

عرج العاملى كذلك على الأشكال ذات الأضلاع المستقيمة ، فبدأ بالأشكال ثلاثية الأضلاع كالمثلثات بأنواعها ، وثنَّى بالأشكال رباعية الأضلاع كالمربع والمستطيل والمُعيَّن وشبيه المعيَّن ، وما عدا ذلك مما أسماه بالمنحرفات ، وقد خصَّ بعضَ هذه المنحرفات بأسماء كذى الزّنقة وذى الزَّنقتين والقثاء ، وانتهى العاملى إلى الأشكال ذات الأضلاع الكثيرة (أى أكثر من أربعة أضلاع) كذى خمسة الأضلاع (فإن تساوت سُمِّىَ مُخمساً) وهكذا ، وقد خُلِعَت على بعض هذه الأشكال المتعدِّدة الأضلاع أسماء خاصة منها المدرّج والمطبل وذو الشُّرف ، وكُلُّها مُبيَّنةٌ صورها فى المخطوط (شكلاَ ٨ ، ٩) .

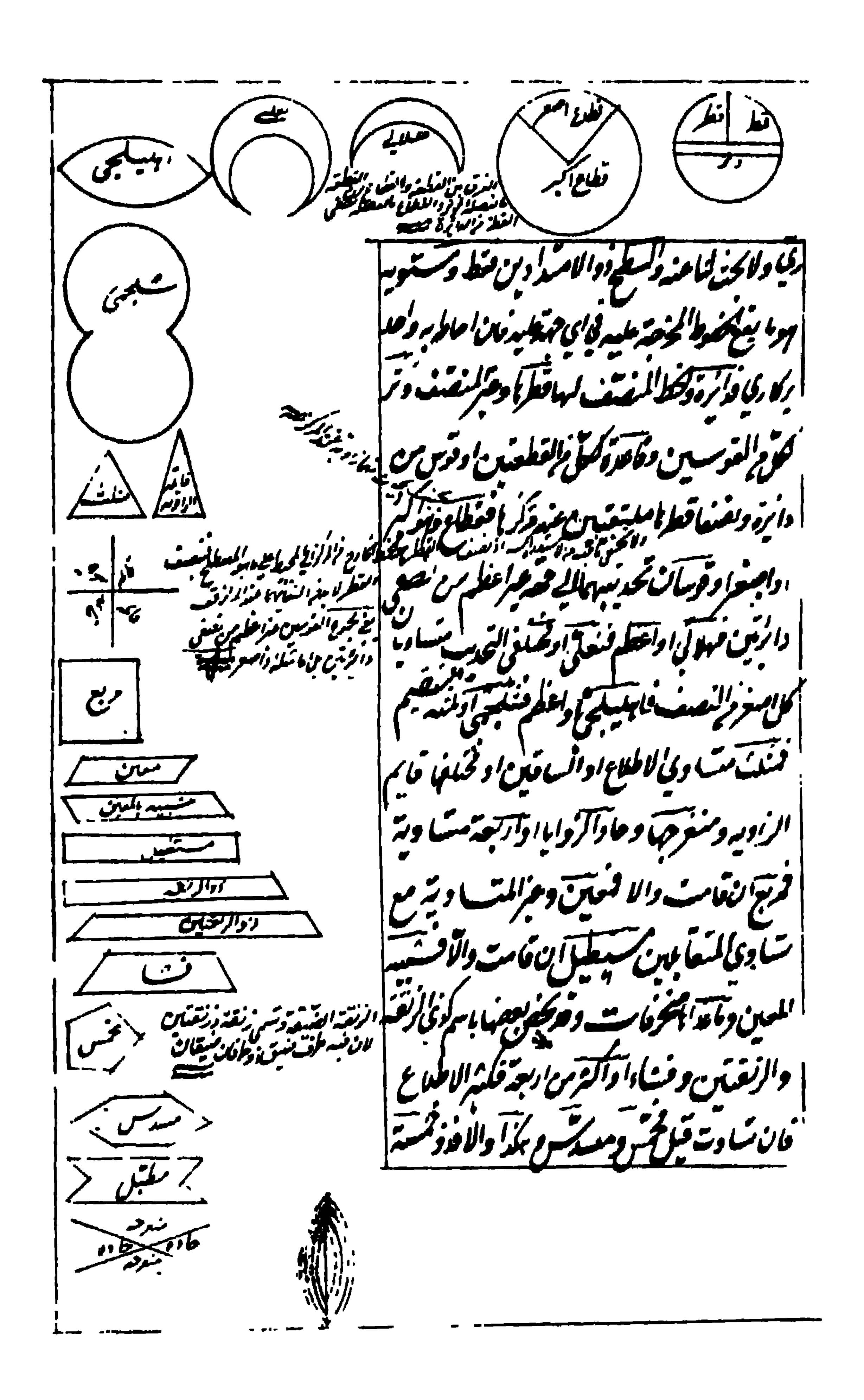
الأجسام الهندسية

عرَّفَ العاملى الجسمَ بأنَّه ذو الامتدادات الثلاثة ، فعرَّفَ بالكرة والمكعَّب والأسطوانة القائمة والمائلة ، والمخروط القائم والمائل ، وأتى بأوصافها ذاكرًا خواصَّها من حيث الأبعاد وأشكال السطوح وعلاقة قاعدة الجسم بسهمه (أى بمحوره) وما إلى ذلك من صفات وخواص هندسية .

علي الحاصل ثلثة دراهم وقسم المجتمع على خمسة وضرب الخارج في
عشرة حصل ... فاقسمها على العشرة واضرب الخمسة في مثلها
وانقص من الحاصل ثلثة ومن نصف الاثنين والعشرين اثنين
وجذر التسعة جواب ولو قيل اي عدد زيد عليه نصفه واربعة
دراهم وعمل بالحاصل كذلك بلغ العشرين فانقص الاربعة ثم ثلث
الستة عشر لانه النصف المزيد يبقى عشرة وثلثا
ثم انقص منها اربعة ومن الباقي ثلثه يبقى اربعة واربعة اتساع
وهو الجواب [...] في المساحة وفيه مقدمة
وثلثة فصول المقدمة المساحة استعلام ما في الكم المتصل من
المقادير امثال الواحد الخطي او ابعاضه مثل شبر ونصف
شبر وكلها ان كان خطيا او امثال المربع كذلك ان كان
سطحيا او امثال المكعب كذلك ان كان جسميا فالخط
ذو الامتداد الواحد فهو مستقيم وهو اقصر الواصلين بين نقطتين
وهو المراد اذا اطلق وابعاد العشرة مشهورة والمحيط مع شكله
بسطح وغير المستقيم منه ركاري وهو معروف [...] ركاري

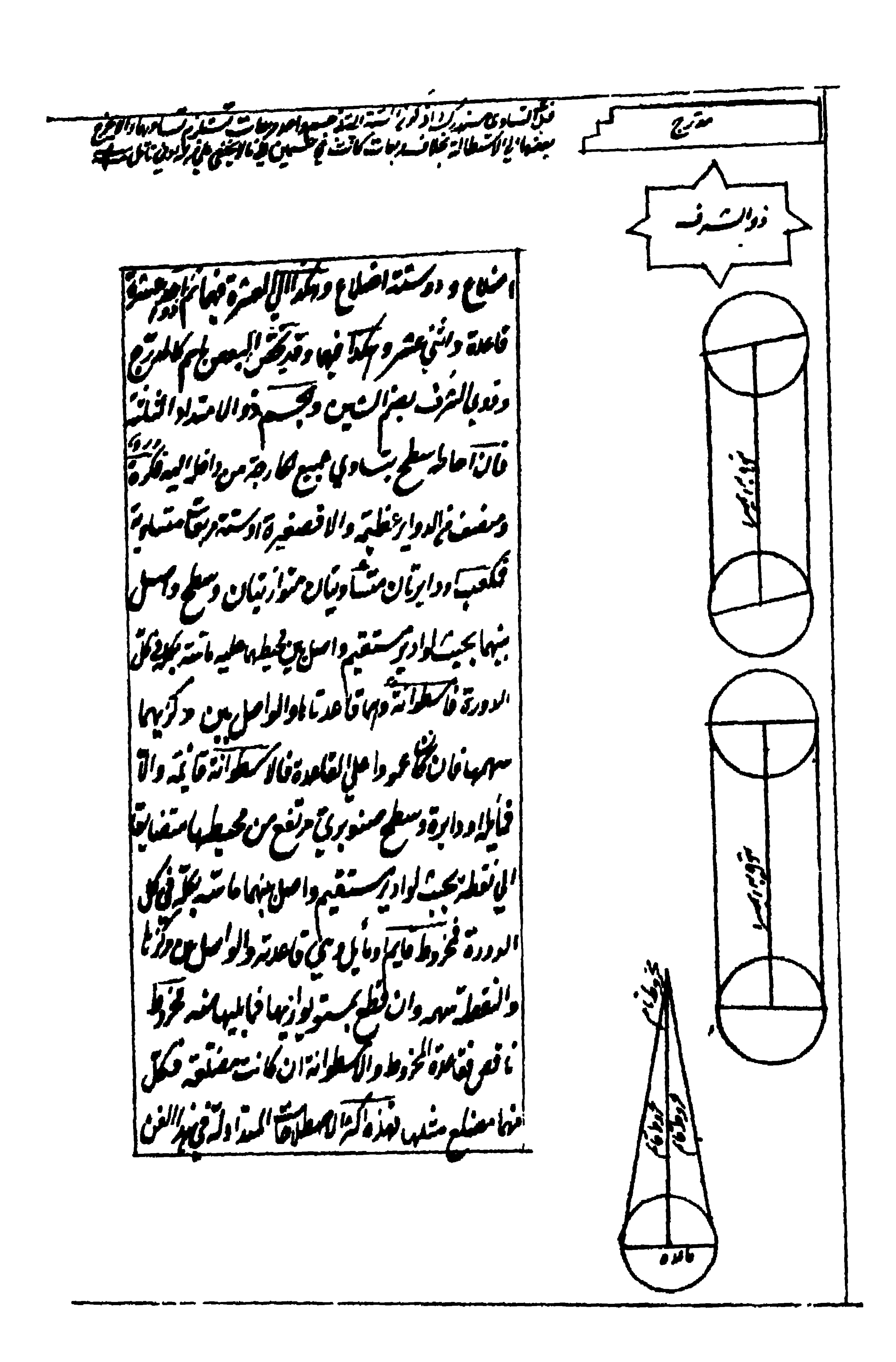
شكل (٧)

الصفحة (٢٦) من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب ـ رقم ١٧٧٣



شكل (٨)

الصفحة (٢٧) من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب ـ رقم ١٧٧٣



شكل (٩)

الصفحة (٢٨) من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب ـ رقم ١٧٧٣

الفصل الأول : فى مساحة السطوح المستقيمة الأضلاع

أمّا المثلثُ فقائِمُ الزاوية منهُ يُضرَبُ أحدُ المحيطين بها فى نصفِ الآخر ، ومنفرجُها بضرب العمودِ المُخرج منها على وترها فى نصفِ الوتر أو بالعكس ، وحادُّ الزّوايا بضرب[1] مخرج من أيّها عمودًا[2] على وترها كذلك . ويعرف أنّه أىّ الثّلثة بتربيع أطول أضلاعه ، فإنْ ساوى الحاصلُ مُربّعى الباقيين فهو قائِمُ الزاوية . أو زاد فمنفرجها ، أو نقص فالحادّ ، وقد يستخرج العمود بجعل الأطول قاعدةً ، وضربِ مجموع الأقصرين فى تفاضلهما ، وقسمة الحاصل عليها . ونقص الخارج منها . فنصف الباقى هو بُعْدُ موقع العمود عن طرف أقصرِ الأضْلاعِ . فأَقِمْ منه خَطًّا إلى الزّاوية فهو العمودُ . فاضربه فى نصفِ القاعدةِ يحصل المساحةُ .

ومن طُرُقِ مساحةِ متساوى الأضلاع ضَرْبُ مربّعِ ربعِ مربّعِ أحدِها فى ثلثة أبدًا . فجذرُ الحاصِلِ جواب .

وأمّا المربّعُ فاضْرِب أحَدَ أضلاعه فى نفسِه .

والمستطيلُ فِى مجاوره .

والمعين نصفَ أحدِ قُطْرَيْه فى كلِّ الآخر .

---

(١) فى المخطوط ٧٥٣ : تضربه .

(٢) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

شرح : خصَّص العاملى هذا الفصل لبيان كيفية إيجاد مساحة الأشكال المستوية ذات الأضلاع المستقيمة كالمثلث بأنواعه والمربع والمستطيل والمُعيَّن والأشكال الرباعية الأخرى والأشكال كثيرة الأضلاع ، وفى هذه الأخيرة يُلجأ ــ عمومًا ــ إلى تقسيم الشكل إلى مثلثات تُعيَّن مساحاتها المنفردة ثم تُجمع لتعطى مساحة الشكل المطلوب .

وباقى ذوات الأربعة ، تقسم مُثلّثين ، فمجموعُ المساحَتَيْن مساحةُ المجموعِ .

ولبعضها طرقٌ خاصّةٌ لا تسَعُها الرسالةُ .

وأمّا كثيرُ الأضلاعِ فالمسدَّس والمُثمَّن فصَاعدًا من زوج الأضلاع تضرب نصفَ قطره[1] فى نصف مجموعها ، فالحاصلُ جوابٌ ، وقطرُهُ الواصلُ بين منتصفى مُتَقابلَيْه ، وما عداها يُقَسَّمُ بمثلّثات ويُمْسَحُ ، وهو يعمّ الكلَّ ، ولبعضها طُرقٌ كذوات الأربعة .

الفصل الثانى

فى مساحةِ بقيّة السُّطوح

أمّا الدّائِرةُ فطبّق خَيْطًا على مُحيطها ، واضْرِب نصفَ قطرها فى نصفِه ، أو الْقِ من مُربَّع قُطرها سُبْعَه (ونصفَ سُبْعِه)[2] ، أو اضْرِب مُرَبَّعَ القَطرِ فى أحد عشر ، واقسم الحاصل على أربعة عشر ، وإنْ ضربت القطرَ فى ثلثة وسُبْعٍ حصل المحيط ، أو قسْمتَ المحيطَ عليه خرجَ القطرُ .

وأمّا قُطّاعاها فاضْرِب نصفَ القطرِ فى نصفِ القوْسِ .

وأمّا قطعتاها فحصّل مركزيهما وكمِّلهما قطّاعَيْن ليحصل مثلّثٌ فانقصْهُ من القطّاع الأصغر ليبقى مساحة الصّغرى ، أو زِدْه على الأعظم ليحصل مساحةُ الكبرى .

وأمّا الهلالىُّ والنعلىُّ فَصِلْ طرفيْهما ، وانقص مساحةَ القطعةِ الصُّغرى من الكبرى .

وأمّا الاهليلجىّ والشّلجمّى فاقسمهما قطعَتيْن .

وأمّا سطحُ الكرّةِ فاضْرب قطرهَا فى مُحيطِ عظيمتها ، أو مُرَبّع قطرها فى أربعةٍ ،

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : قطرها .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

وانقص من الحاصِل سُبْعَهُ ونِصْفَ سُبْعِهِ ، ومساحةُ سطحِ [1] قطعتيها تُساوى مساحةَ دائرةٍ نصف قطرها يُساوى خطًّا واصلاً بين قُطبِ القطعة ومُحيطِ قاعدتها .

وأمَّا سطحُ الأسطوانةِ المستديرةِ القائمِة ، فاضْرِبْ الوَاصلَ بين قاعدتيها الموازى لِسهْمِها فى محيط القاعدة .

وأمَّا سطحُ المخروطِ المستديرِ القائِمِ ، فاضرب الواصلَ بين رأسِهِ ومُحيطِ قاعدتِه فى نصفِ مُحيطها .

وما لم يُذكر من السُّطوحِ يُستعان عليه بما ذُكِر .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : يختص الفصل الثانى بإيجاد مساحة الدائرة وقطّاعيها وقطعتيها . كذا مساحة الأشكال الهلالية والنعلية والإهليلجية والشلجمية . ويعرج العاملى بعد ذلك إلى تعيين مساحة أسطح الأجسام الهندسية . فيعرض لسطح الكرة . وسطح الأسطوانة المستديرة القائـمة . وسطح المخروط المستدير القائم .

الفصل الثالث

فى مساحة* الأجسام

أمَّا الكرةُ فاضْرِب نِصفَ قطرِها فى ثُلْث سطحها ، أو الْقِ من مكعَّب القطر سُبْعَهُ ونِصْفَ سُبْعِهِ ، ثمّ من[1] الباقى كذلك ، وأمَّا قِطْعَيها[2] فاضْرب[3] نِصْفَ قُطرِ الكرةِ فى ثلث سطحِ القطعةِ .

وأمَّا الأسطوانةُ مطلقًا ، فاضرب ارتفاعَها فى مساحةِ قاعدتها .

وأمَّا المخروطُ التّامُ مطلقًا ، فاضْرب ارتفاعَه فى ثُلث مِسَاحة قاعدتِه ، وأمَّا المخروطُ النّاقصُ المستديرُ ، فاضْرِب قطرَ قاعدتِه العظمى فى ارتفاعِه ، واقْسِم الحاصلَ على التّفاوت بين قُطْرى القاعدتين يحصل ارتفاعُه لو[4] كان تامًّا ،

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : و .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : قطعتاها .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) فى المخطوط ١٢٥٣ : إن .

* يعنى بها الحجم وليس مساحة السطح . ويبدو أن المُصنِّف يستعمل كلمة المساحة فى معنى القياس .

شرح : يقصد العاملى فى هذا الباب إلى تعيين أحجام الأجسام الهندسية المنتظمة ، فيعين أحجام الأجسام المألوفة كالكرة والأسطوانة . والمخروط التام ، والمخروط الناقص المستدير ، كذا حجم المضلّع .

وفى الواقع فإنّ ما ذكره العاملى فى الباب السادس لم يأت فيه بجديد حيث إن المعلومات التى أوردها فيه كانت معروفة تمامًا من قبل لا سيما وأن الإغريق قد سبق وأن أفرغوا جانبًا كبيرًا من جهدهم الفكرى فى مجال الهندسة من أشكال مستوية وأجسام منتظمة . ولعلّ مؤلفات إقليدس تقف خير شاهد على سَبْقِ الإغريق فى هذا المضمار .

والتّفاضُل بين ارتفاعى التّامِ والنّاقصِ ارتفاع المخروطِ الأصغرِ المُتمِّم له ، فاضْرب ثُلثه فى مساحةِ القاعدِة الصُّغرى يَحصل مساحته ، فاسْقطها من مساحةِ التّامِّ .

وأمَّا المضلَّعُ فاضْرب ضلعًا من قاعدتهِ العظمى فى ارتفاعه ، واقْسِم الحاصِلَ على التّفاضُل بين أحد أضلاعه[1] وآخر من الصغرى ليحصل مساحةُ التّام ، وكمِّل العمَلَ .

وبراهينُ هذه الأعمال مُفصَّلة[2] فى كتابنا الكبير المُسَمَّى «ببحر الحساب» وفقنا الله تعالى لإتمامه .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : أضلاعها .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

الباب السابع

فيما يتبع المساحات من وزن الأرض لإجراء القنوات ، ومعرفة ارتفاع المرتفعات ، وعروض الأنهار ، وأعماق الآبار

وفيه ثلثة فصول .

الفصل الأوّل : فى وزن الأرض لإجراء القنوات

اعمل صفحةً مثلّثةً[1] من نحاسٍ ونحوه متساوية السّاقين ، وبين طرفى قاعدتها عُرْوتان ، وفى موضعِ العمود منها خيطٌ رقيق مُثقّل ، واسلكها فى منتصف خيط ، وضَعْ طرفَيْه على خشبتَيْن مقوَّمتَيْن متساويتين مُعْتدلتيْن بالثّقّالتَيْن ، والجلاجل بيدى رَجُلَيْن بينهما بقدر[2] الخيط ، وقد جرت العادة بكوْنِ الخيطِ خمسة عشر ذراعًا بذراع اليد ، وكلٌّ من الخشبتين خمسةَ أشبارٍ ، وانظر إلى[3] الشّاقول ، فإن انطبق خيطهُ على زاوية الصُّفيحة[4] فالموقفان متساويان ، وإلاّ فَنزِّل الخيطَ عن رأسِ الخشبةِ إلى أن يحصل الانطباقُ ، ومقدارُ النّزولِ (و)[5] هو الزّيادة ، ثمّ انقل أحد الرَّجُلَين إلى الجهة التى تريد وزنها ، وتحفظ كلاًّ[6] من الصُّعود والنّزول على حدة ، وتلقى القليلَ من الكثير ، فالباقى تفاوت المكانَيْن ، فإن تساويا شَقَّ إجراءُ الماء ،

---

(١) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

(٢) فى المخطوط ٧٥٣ : مقدار .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) فى المخطوط ١٧٧٣ : الصفحة .

(٥) زائدة فى المخطوط ٧٥٣ .

(٦) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

وإلاّ سَهُل أو امتنع . وإن شئت فاعمل انبوبةً ، واسْلكها فى الخيطِ ، واستَعِن بالماء واستَغن عن الشّاقول والصَّفيحة[١] .

طريق آخر

قف على البئر الأوَّل . وضَعْ عَضادَةَ الاسطرلاب على خطِّ المشرقِ والمغربِ . ويأخذُ آخر قصبةً يساوى طولُها عُمقَه . ويذهب فى الجهةِ التى تريدُ سَوْقَ الماء إليها ناصبًا لها . (فانظر إليها)[٢] إلى أن ترى رأسها من الثّقبتين . فهناك يجرى الماءُ على وجه الأرضِ . وإن بعدت المسافةُ بحيث لا ترى رأسَها . فاشعل[٣] فيها سِراجًا . واعمل ذلك ليلاً .

---

(١) فى المخطوط ١٧٧٣ : الصفحة .

(٢) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ . ١٧٧٣ .

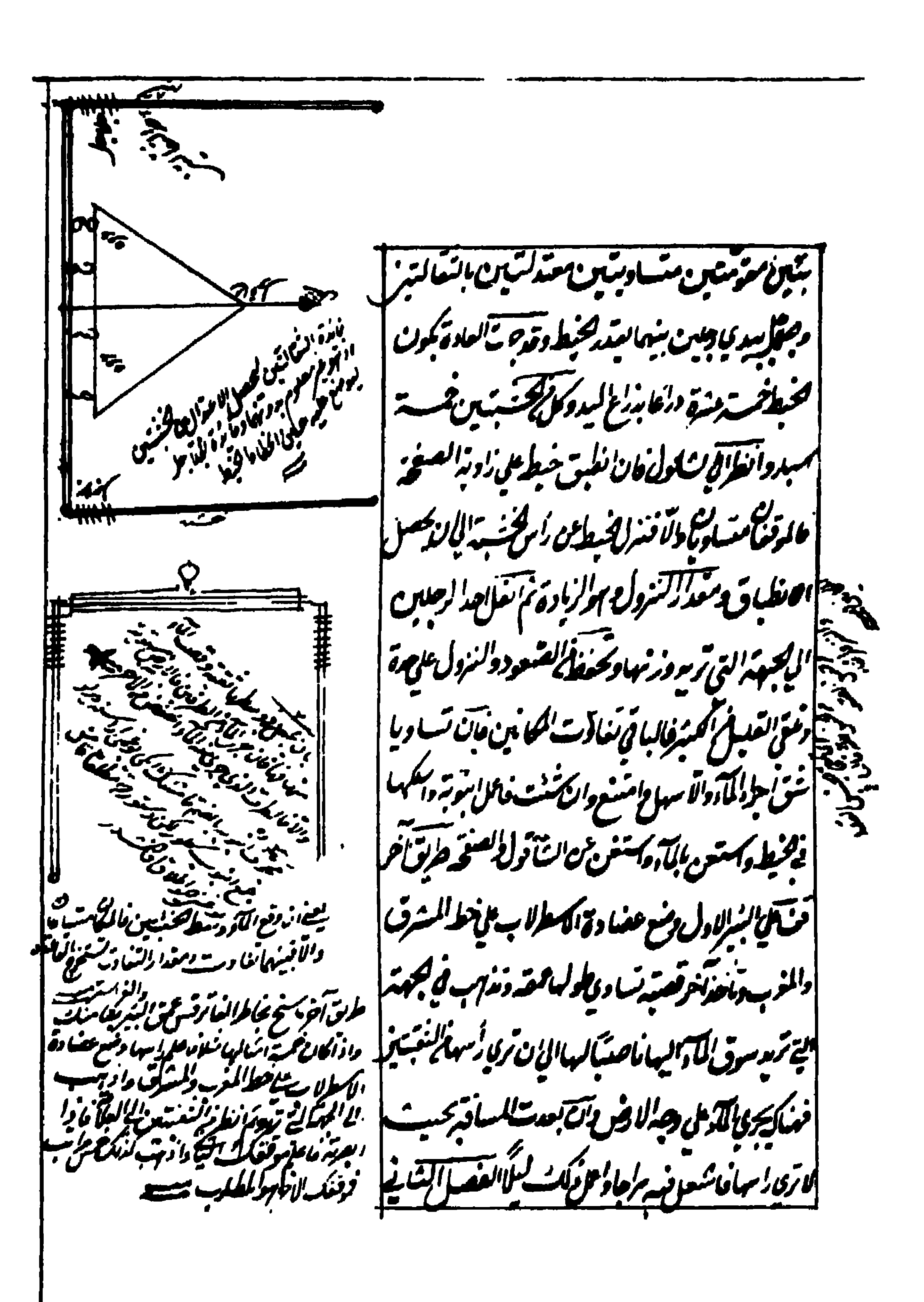
(٣) فى المخطوط ١٢٥٣ : فاشتعل .

شرح : يعرض العاملى فى هذا الفصل طُرقًا مختلفة لإيجاد فرق المنسوب (أى فرق الارتفاع) بين موضعين على الأرض . وقد عبَّر العاملى عن هذه العملية «بوزن الأرض» . وتُعتبر عمليةً أساسيةً لمعرفة مدى الانحدار فى الأرض حتى يمكن شقّ القنوات لينساب الماء من الموضع العالى إلى الموضع المنخفض من الأرض . إذ أنه لوكان الموضعان المختبران عند مستوى واحد لامتنع شق القنوات .

فى الطريق الأول ـ ويوضحه الرسم المبين بالمخطوط ١٧٧٣ (شكل ١٠) ـ يُستعان بصفيحة مثلثة متساوية الساقين مُعلَّقة بحيث يكون رأس المثلث إلى أسفل وقاعدته موازية للخيط الواصل بين قائمين خشبيين متساويين . ويبين وضع الصفيحة المثلثة خيط الشاقول المثبّت عند منتصف الخيط المستعرض الواصل بين القائمين ، ومن المعروف أن خيط الشاقول (خيط رفيع يحمل ثقلاً عند طرفه السفلى ويتجه ـ بالجاذبية الأرضية ـ نحو سطح الأرض) يتخذ دومًا وضعًا رأسيًّا . فعند انطباق خط التماثل فى الصفيحة على خيط الشاقول يكون موقعا للقائمين الجانبيين فى مستوى أفقى واحد . أمّا فى حالة عدم الانطباق فإنّه يجرى إنزال الخيط المستعرض الواصل بين القائمين حتى يتم =

= انطباق خط تماثل الصفيحة (الخط المُسقط من رأس المثلث المتساوى الساقين على قاعدته) على خيط الشاقول ، وفى هذه الحالة يكون مقدار إزاحة الخيط المستعرض عن موضعه الأصلى عند أحد القائمين مُساويًا لفرق المنسوب بين موضعى القائمين.

يذكر العاملى كذلك طريقين آخرين «لوزن الأرض» تستخدم فى أحدهما أنبوبة تُسْلَكُ فى الخيط مع الاستعانة بالماء على حد تعبيره ، ولعلّ العاملى يشير هنا إلى ما نعرفه اليوم بميزان الماء ، أما الطريق الثالث الذى أشار إليه العاملى فإنَّه يُستعان فيه بجهاز الرَّصد المعروف بالاسطرلاب .



بيتين متوسطتين متساويتين معتدلتين بالتعاليق
و يصل بيد يا رجلين بينهما بقدر الخيط وقد جرت العادة بكون
الخيط خمسة عشر ذراعا بذراع اليد وكل من الخشبتين خمسة
اشبار وانظر الي الشاقول فان انطبق خيطه على زاوية الصفحة
فالموقعان متساويان والا فينزل الخيط عن رأس الخشبة الي ان يحصل
الانطباق ومقدار النزول هو الزيادة ثم انقل احد الرجلين
الي الجهة التي تريد وزنها وتحفظ الصعود والنزول على صورة
وتفتح القبيل الكبير فالباقي تفاوت المكانين فان تساويا
شق اجراء الماء والا سهل وامتنع وان شئت فاعمل انبوبة واسلكها
في الخيط واستعن بالماء واستغن عن الشاقول والصفحة طريق آخر
قف على البئر الاول وضع عضادة الاسطرلاب على خط المشرق
والمغرب وخذ آخر قصبة تساوي طولها عمقه واذهب في الجهة
التي تريد سوق الماء اليها ماسكا لها الي ان ترى رأسها في الثقبتين
فهناك يجري الماء على وجه الارض وان بعدت المسافة بحيث
لا ترى رأسها فاشعل فيه سراجا او غير ذلك ليلا الفصل الثاني

شكل (١٠)

الصفحة (٣٣) من مخطوط مكتبة الأوقاف الإسلامية بحلب ـ رقم ١٧٧٣

الفصل الثانى : فى معرفة ارتفاع المرتفعات

إنْ أمكن الوصولُ إلى مسقط حجرها ، وكانت[1] فى أرضٍ مستوية ، فانصب شاخصًا ، وقِفْ بحيث يَمرُّ شُعَاعُ بصَرِك على رأسه إلى رأسِ المرتفع ، ثمّ امسح من موقفك إلى أصله ، واضرِب المجتمِعَ فى فضْلِ الشّاخِصِ على قامتك ، واقسم الحاصلَ على ما بين موقِفِكَ وأصلِ الشّاخِصِ ، وزِدْ قامتَكَ على الخارج ، فهو المطلوب .

طريق آخر

ضَعْ على الأرض مرءاةً بحيث ترى رأسَ المرتفع فيها ، واضرب ما بينها وبين أصله فى قامتك ، واقْسِمِ الحاصلَ على ما بينها وبين موقفك ، فالخارجُ هو الارتفاعُ .

طريق آخر

انصب شاخصًا ، واستعلم نسبةَ ظِلّه إليه ، فهى بعينها نسبةُ ظلِّ المرتفع إليه .

طريق آخر

استعلم قدر الظلّ وارتفاع الشمس مه[2] ، فهو قدر المرتفع .

طريق آخر

ضَعْ شَطِيّة الأسطرلاب[3] على مه[4] ، وقِفْ بحيث ترى رأس المرتفع من

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : كان .

(٢) كذا فى الأصل ، وفى هامش المخطوط ١٢٥٣ كُتب أمامه «خمسة وأربعون» ، ولعل هذا الاختصار يُعبِّر عن «منتصف قائمة» مستعينًا بالحرفين الأول والأخير .

(٣) فى المخطوط ١٢٥٣ : الارتفاع .

(٤) نود الإشارة هنا إلى أن العرب قد استعملوا فى كتاباتهم بعض اختصارات للكلمات التى يتكرر ورودها ، فمن أمثال هذه الكلمات المختصرة : المص للمصنِّف ، وظ لكلمة ظاهر ، ومم لكلمة ممكن ، وح للمُصَحِّح ، ومح لكلمة محال ، ويق لكلمة يُقال ، والمط للمطلوب ، وغيرها كثير .

الثّقبتين ، ثمّ امسح من موقفك إلى أصْلِه ، وزدْ قامتك على الحاصل ، فالمجتمِعُ هو المطلوب .

وبراهين هذه الأعمال مُبَيّنةٌ فى كتابنا الكبير .

ولى على الطريق الآخر[1] برهانٌ لطيفٌ لم يسبقنى أحدٌ إليه ، أوْردته فى تعليقاتى على فارسيّة الاسطرلاب :

وأمّا مالاَ يمكن الوصولُ إلى مسقطِ رأسِهِ (كالجبال ، فابصر[2] رأسه)[3] من الثّقبتين ، ولاحظ الشّطِّيةَ التّحتانيّة على أىّ خط[4] من خطوط الظلّ وقَعَتْ ، واعْلَمْ موقفك وأدرْها إلى أن يزيدَ أو ينقص قدمٌ أو اصبعٌ ، ثمّ تقدَّمْ أو تأخّرْ إلى أنْ تُبصِر[5] رأسَه مرّةً أخرى ، ثمَّ امسح ما بين موقفيك[6] ، واضربه فى سبعة ، أو اثنى عشر ، بحسب الظّلِّ ، فالحاصِلُ مع قدْرِ قامَتِك ، وهو المطلوب .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

(٢) فى المخطوط ١٧٧٣ : فانظر .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٥) فى المخطوط ١٢٥٣ : تنظر .

(٦) فى المخطوط ١٧٧٣ : موقفك .

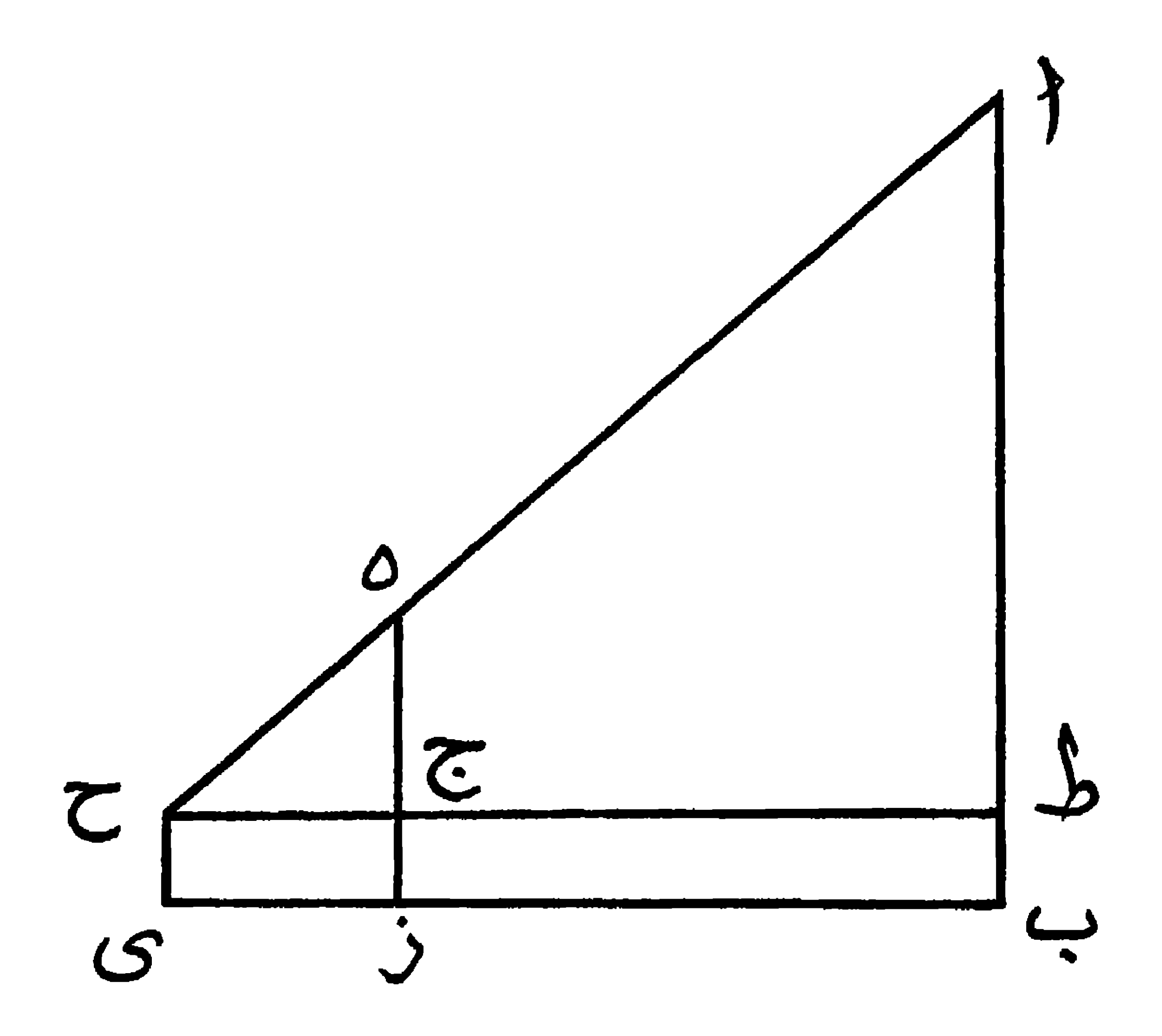
شرح : يتناول العاملى فى هذا الفصل تعديد الطرق التى يمكن بها تحديد ارتفاع مرتفع ما .

فى الطريق الأول يُستعان بشاخص ويتم الرصد بحيث يمر شعاع بصر الراصد برأس الشاخص ورأس المرتفع فى آن واحد ، ثم يتم تحديد المسافات بين المرتفع والشاخص وموقف الراصد على ما هو وارد بمتن المخطوط .

هذا وقد وجدنا فى هامش المخطوط ١٢٥٣ برهانًا لهذا الطريق فى تعيين ارتفاع المرتفع نورده بلفظه فيما يلى :

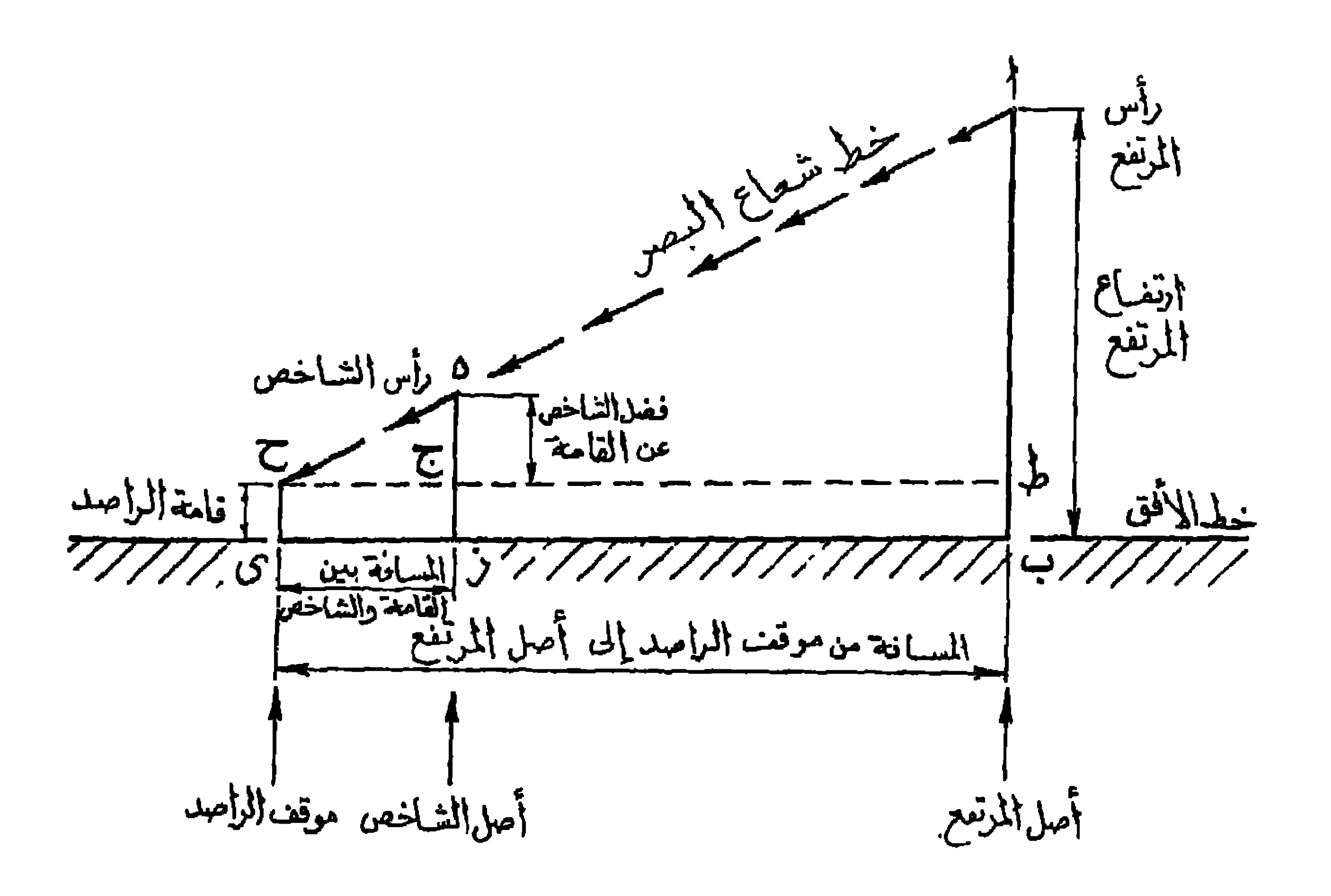
«بُرهانه على ما أوردناه فى كتابنا الكبير (يقصد كتاب العاملى : «بحر الحساب» الذى يبدوا أنه لم يُكتب له أن يتم) :

نفرض المرتفع اب ، والشاخص ەز ، والقامة حى ، والثلثة أعمدة على خط ىزب وهو الأفق ، وحە الخط الشعاعى ، ولنخرج من خط حى حجط —



شكل (١١)
تعيين ارتفاع مرتفع بالاستعانة بشاخص (برهان العاملى)

= موازيًا للأفق ، وكل من سطحى ح ج ، ز ب (فى المخطوط : ح ز ج ب ، وهو تحريف من الناسخ) يتساوى متقابلان يشكل لد* من أولى الأصول ، وفى مثلثى ح ج ه ، ح ط ا زاوية ح مشترك ، وزاويتا ج ، ط قائمتان يشكل كط* من الأولى ، وزاويتا ح ه ج ، ح ا ط متساويتان أيضًا فبشكل ى* من السادس . يكون نسبة ح ج [إلى ح ط] – وهو ما بين موقفيك [والشاخص] وأصل المرتفع – كنسبة ج ه – وهو فضل الشاخص على قامتك – إلى ا ط وهو المجهول . فإذا ضربت أحد الوسطين فى الآخر وقسمت الحاصل على الطرف المعلوم ، خرج ا ط المجهول ، فأضف إليه قامتك المساوية لـ ب ط يحصل الم ط (يقصد المطلوب) . » (* كذا فى هامش المخطوط) ..
ويمكن تتبع هذا البرهان بالرجوع إلى شكل (١١) . ونشرح هذا الطريق بالرسم المبيّن تاليه مستخدمين نفس الرموز التى استخدمها العاملى فى برهانه (شكل ١٢) . =



شكل (١٢)

تعيين ارتفاع مرتفع برصد رأسى المرتفع وشاخص

= ويتضح من تشابه المثلثين أ ط ح ، ه ج ح أن $\frac{\text{أ ط}}{\text{ه ج}} = \frac{\text{ط ح}}{\text{ج ح}}$

أى أن : $\frac{\text{ارتفاع المرتفع} - \text{طول قامة الراصد}}{\text{الفرق بين ارتفاع الشاخص وقامة الراصد}} =$

$= \frac{\text{المسافة من موقف الراصد إلى أصل المرتفع}}{\text{المسافة من موقف الراصد إلى أصل الشاخص}}$

فيكون ارتفاع المرتفع =

$\frac{\text{المسافة من موقف الراصد إلى أصل المرتفع} \times \text{الفرق بين ارتفاع الشاخص وقامة الراصد}}{\text{المسافة من موقف الراصد إلى أصل الشاخص}}$

+ طول قامة الراصد

وفى الطريق الثانى يلجأ الراصد إلى مرآة يضعها على الأرض ، ويبعد عنها فى الطرف المعاكس للمرتفع حتى يرى رأس المرتفع ، ويبين شكل (١٣) الفكرة التى تقوم عليها هذه الطريقة مع برهانها الهندسى .

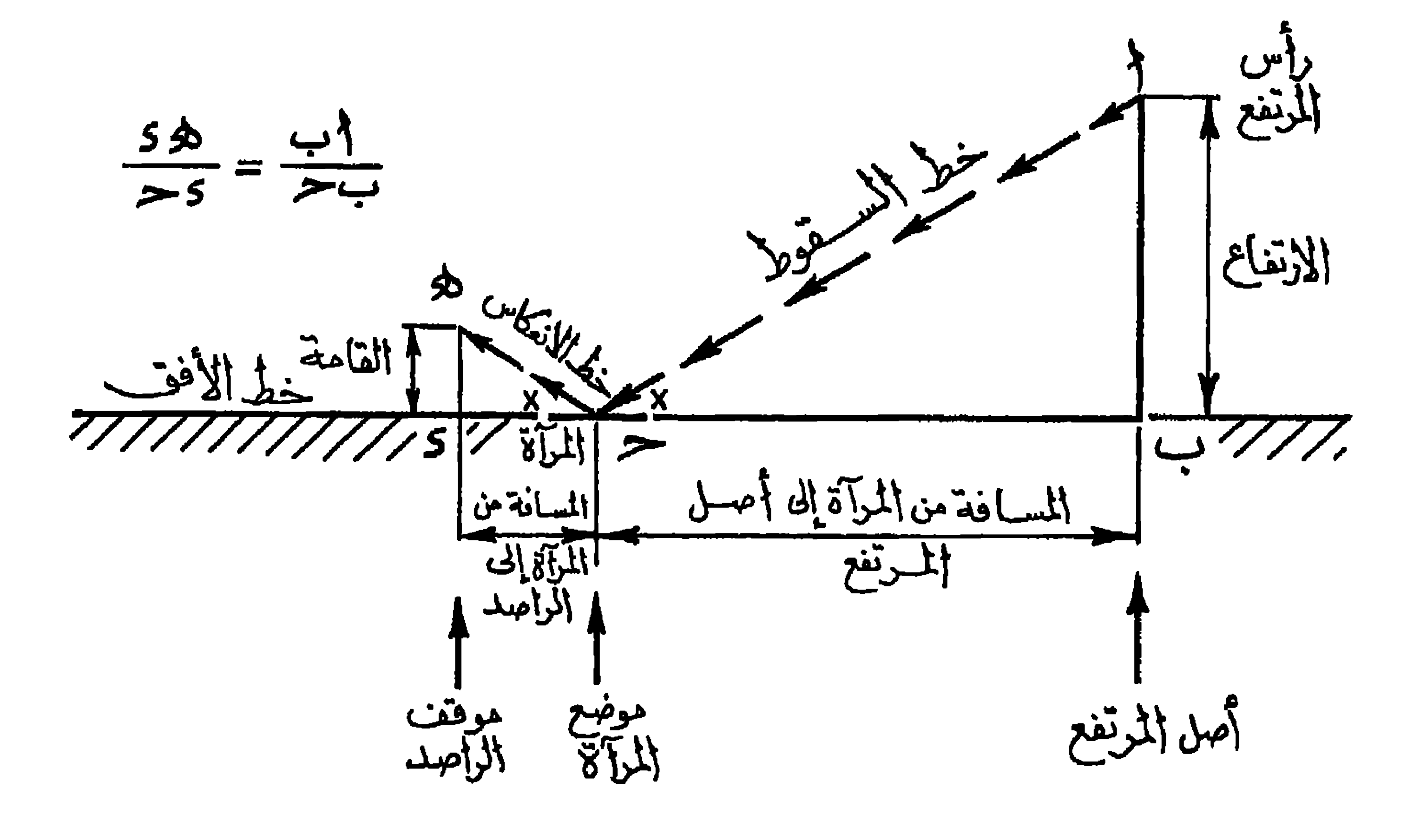
ولما كان خط السقوط وخط الانعكاس عن المرآة يصنعان زاويتين متساويتين مع خط الأفق ، فإن المثلثين ابجـ ، هـدجـ مثلثان متشابهان ، ومنه نحصل على العلاقة :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{ء جـ}}$$

أى أن : $\frac{\text{ارتفاع المرتفع}}{\text{المسافة من المرآة إلى أصل المرتفع}} = \frac{\text{طول قامة الراصد}}{\text{المسافة من المرآة إلى موقف الراصد}}$

وبذلك يكون ارتفاع المرتفع =

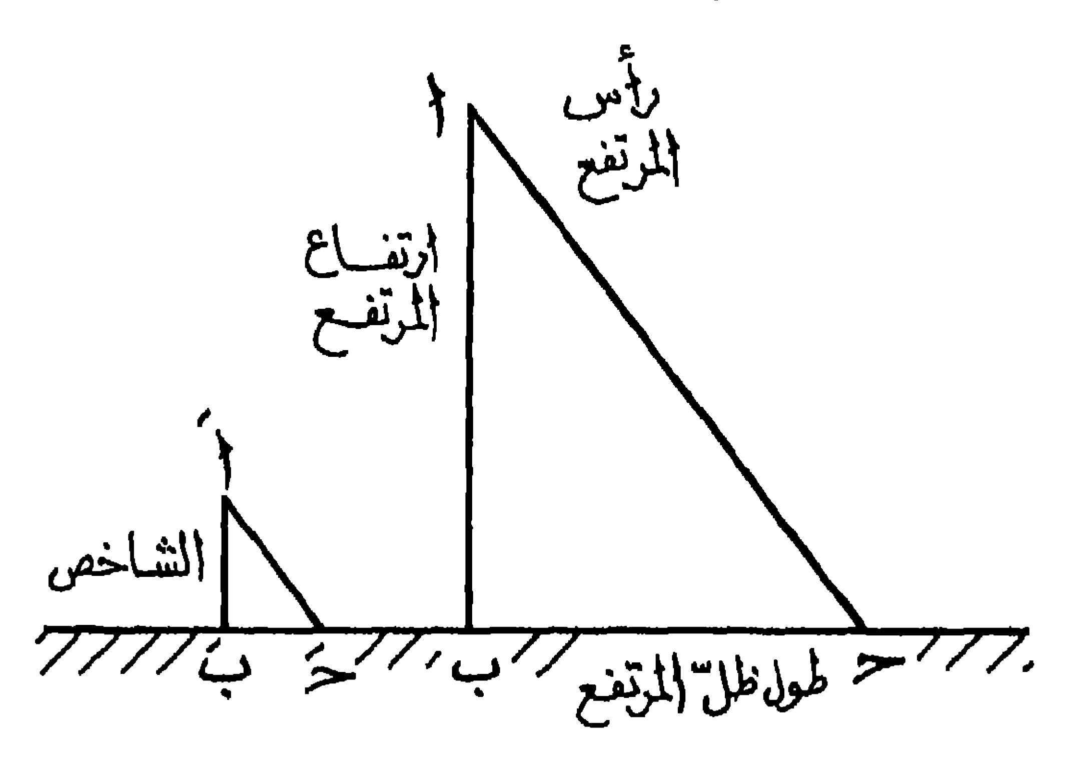
$$\frac{\text{طول قامة الراصد} \times \text{المسافة من المرآة إلى أصل المرتفع}}{\text{المسافة من موضع المرآة إلى موقف الراصد}}$$



شكل (١٣)
تعيين ارتفاع مرتفع باستخدام مرآة مستوية

أما فى الطريق الثالث فإنه يُستعان بقياس طول ظلّ المرتفع فى تحديد ارتفاعه على أساس أن نسبة طول ظل المرتفع إلى ارتفاعه تساوى نسبة طول ظل شاخص معين إلى ارتفاعه . ويبين من شكل (١٤) أن هناك تشابها فى المثلثين الخاصين بالمرتفع والشاخص .

من ذلك تنتج العلاقة : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أَ بَ}}{\text{بَ حَـ}}$



شكل (١٤)
تعيين ارتفاع مرتفع بطريق قياس الظلّ

أى أن $\frac{\text{ارتفاع المرتفع}}{\text{طول ظل المرتفع}} = \frac{\text{ارتفاع الشاخص}}{\text{طول ظل الشاخص}}$

وبقياس ارتفاع الشاخص وطول ظله ، كذلك قياس طول ظل المرتفع فإنه بالتعويض فى المعادلة المتقدّمة يمكن تعيين ارتفاع المرتفع ، ومن الواضح أنّه يُشترط فى هذه الطريقة إمكان قياس ظل المرتفع .

أما الطريقان الباقيان فإنهما يعتمدان على تكوين مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، أى أن تكون كلٌّ من زاويتيه المتساويتين نصف قائمة ، وبذلك يكون قدر المرتفع مُساويًا لقدر ظلّه (عندما تكون الشمس مثلاً مائلة بمقدار ٤٥° على خط الأفق ، أو عندما يُضبط الأسطرلاب ليتخذ هذا الميل مع إدخال قامة الراصد فى الاعتبار) .

الفصل الثالث : فى معرفة عروض[1] الأنهار ، وأعماق الآبار

أمَّا الأول فقف على شاطئ النهر وانظر جانبه الآخر من ثُقبتى العضادة ، ثمّ أدِرْ[2] إلى أن ترى شيئًا من الأرض منها ، والأسطرلاب على وضعه ، فما بين موقفِك وذلك الشيء يساوى عرض النَّهر.

وأمَّا الثانى فانصب[3] على البئر ما يكون بمنزلةِ قطر تدويره ، والق ثقيلاً مُشْرِقًا من مُنتصفِ القطرِ بعد إعلامه . ليصلَ إلى قعر البئر بطبعه ، ثم انظر المُشْرِق من ثقبتى العضادة بحيث يمرُّ الخطّ الشعاعىّ مقاطِعًا للقطر إليه . فاضرب ما بين العلامة ونقطة التقاطع فى قامتك ، واقسم الحاصِلَ على ما بيْن النقطة وموقفك ، فالخارج عمق البئر.

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

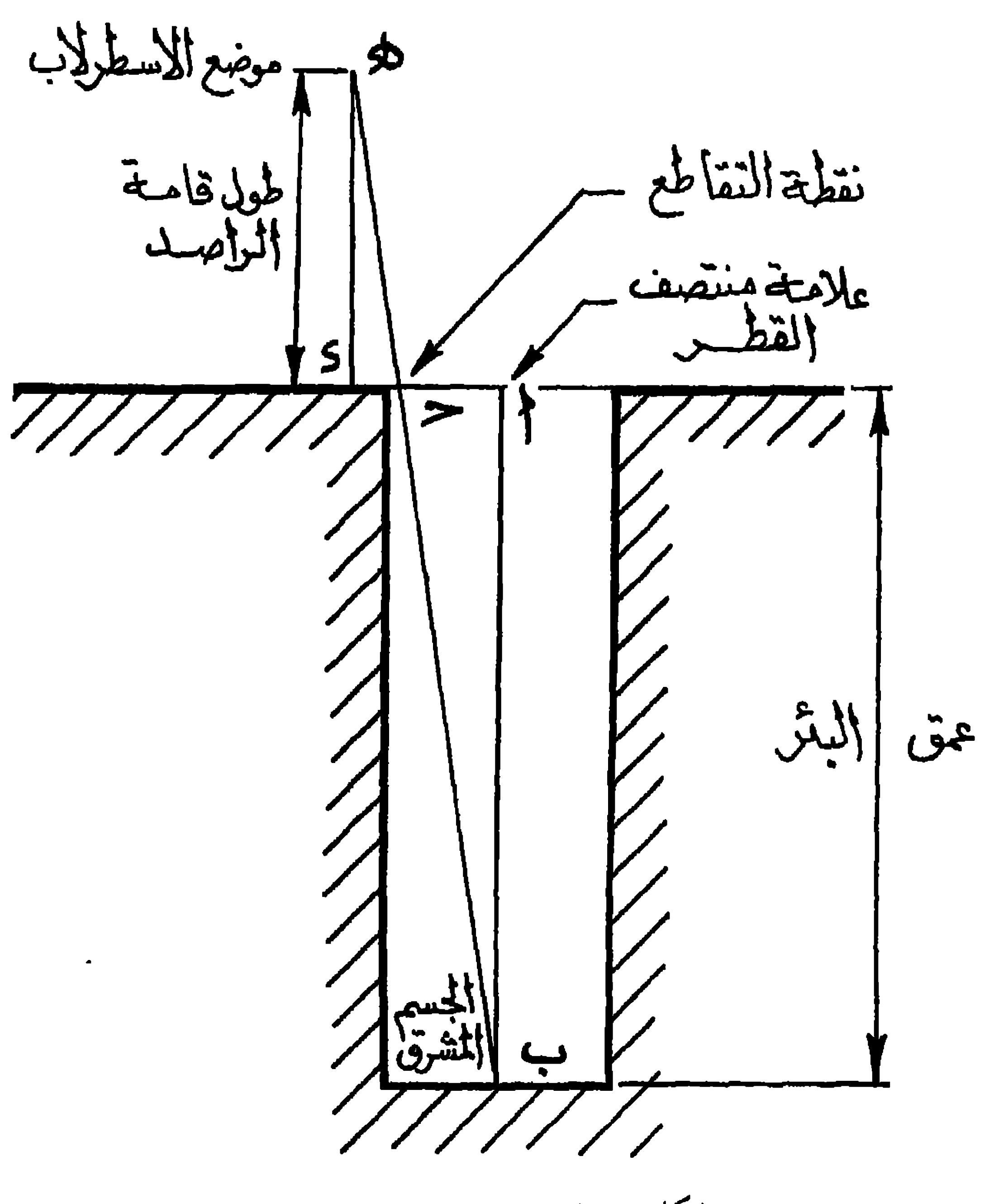
(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : در

(٣) فى المخطوط ٧٥٣ : فانصف وهو تحريف واضح .

شرح : يصف العاملى كيفية تعيين عرضَ نهرٍ ما باستخدام الأسطرلاب ، وتقوم فكرة الرصد على أساس أن يكون عرض النهر ضلعا فى مثلث قائم الزاوية عند الراصد ومتساوى الساقين ، فأحد الضلعين فى هذا المثلث هو عرض النهر والضلع الآخر هو المسافة من موقف الراصد إلى الشيء الذى يُرى من الأرض من ثقبتى عضادة الاسطرلاب بعد إدارته . أى أنه فى هذه الطريقة ننقل ـ بطريق المثلث القائم المتساوى الساقين ـ مقدار عرض النهر إلى مسافة يمكن قياسها على اليابسة (جانب النهر) .

أما طريقة قياس عمق بئر ما فتعتمد على تكوين مثلثين متشابهين كما هو موضح فى شكل (١٥) حيث نجد أن :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{دَ حـ}}$$



شكل (١٥)

قياس عمق بئر باستخدام الأسطراب

أى أن : $\frac{\text{عمق البئر}}{\text{المسافة بين علامة منتصف القطر ونقطة التقاطع}} = \frac{\text{طول القامة}}{\text{المسافة بين نقطة التقاطع وموقف الراصد}}$

فيكون عمق البئر = $\frac{\text{ما بين العلامة ونقطة التقاطع} \times \text{القامة}}{\text{ما بين نقطة التقاطع وموقف الراصد}}$

وهو ما جاء بمتن المخطوط .

البابُ الثّامنُ

فى استخراج المجهُولات بطريق الجَبر والمُقابلة

وفيه فصلان .

الفصل الأول : فى المقدّمات

يُسمّى المجهولُ شيئًا ، ومضروبه فى نفسه مالاً ، وفيه كعبًا ، وفيه مال مالٍ ، وفيه مال كعبٍ ، وفيه كعب كعب ، وهكذا إلى غير النّهاية ، يصير مالين وكعبًا ، ثمَّ أحدهما كعبًا ، ثمّ كلٌّ منهما كعبًا ، فسابعُ المراتب : مال مالِ الكعب ، وثامنها : مالُ كعب الكعب ، وتاسعها : كعب كعب الكعبِ ، وهكذا ، والكلُّ متناسبة صعودًا ونزولاً ، فنسبةُ مالِ المال إلى الكعب ، كنسبةِ الكعبِ إلى المالِ ، والمالِ إلى الشّيء ، والشّيء إلى الواحد ، والواحدِ إلى جزء الشّيء ، وجزءِ الشَّيء إلى جزء المال ، وجزءِ المال إلى جزء الكعب ، وجزءِ الكعب إلى جزء مال المالِ ، وإذا أردتَ ضَرْب جنس فى آخَرَ ، فإن كانا فى طرفٍ واحدٍ ، فاجمع مراتبهما ، وحاصلُ الضرب يُسمَّى المجموع ، كمالِ الكعْب ، فى مالِ مال الكعب ، الأول خُماسيّ ، والثانى سُبَاعِيّ ، فالحَاصلُ كعبُ كعْبِ كعبِ[1] الكعبِ[2] أربعًا ، وهو فى الثانية عشر ، أو فى طرفَيْن ، فالحاصلُ من جنس الفضْلِ ، فى طرف ذى الفَضْل ، فجزءُ مالِ المالِ ، فى مال الكَعْبِ ، الحاصلُ الجذرُ ، وجزءُ كعبِ كعبِ الكعبِ ، فى مالِ مالِ الكَعْبِ ، الحاصلُ جزءُ المالِ ، وإنْ لم يكن فَضْلٌ ، فالحاصلُ من جنسِ الواحدِ .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

(٢) فى المخطوطين ١٧٧٣ ، ١٢٥٣ : كعب .

وتفصيلُ طُرُقِ القِسْمة والتّجذيرِ وباقى الأعمال ، (هو)[1] موكولٌ إلى[2] كتابِنا الكبير.

ولمّا [كانت الجبريّاتُ التى انتهت إليها أفكارُ الحكماءِ منحصرةً فى الستّ ، و][3] كان بناؤها على العَدَدِ والأشياءِ والأمْوال ، وكان هذا الجدول متكفِّلاً بمعرفةِ (جنس)[4] جنسيَّة حاصِل ضربها ، وخارج قِسْمَتِها ، أوردناه تسهيلاً واختصارًا[5] ، وهذه صورته :

---

(١) زائدة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : فى .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

(٤) زائدة فى المخطوط ١٧٧٣ .

(٥) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

شرح : يقدّمُ العاملى فى هذا الفصل بعض التعاريف الخاصة بعلم الجبر مثل المجهول أو الشىء ، والمال ، والكعب ومراتبها ، وكذا أجزاء الشىء والمال والكعب ومراتبها أيضًا ، ونبين فيما يلى كشفًا مقارنًا لهذه التعاريف ومقابلها الرياضى كما نستعمله اليوم :

التعبيرات التى استعملها العلماء العرب	المقابل الرياضى العصرى
المجهول أو الشىء	س
المال = مضروب الشىء فى نفسه	$س \times س = س^{2}$
الكعب = مضروب الشىء فى ماله	$س \times س^{2} = س^{3}$
مال مال	$س^{2} . س^{2} = س^{4}$
مال كعب	$س^{2} . س^{3} = س^{5}$
كعب كعب	$س^{3} . س^{3} = س^{6}$
مال مال كعب	$س^{2} . س^{2} . س^{3} = س^{7}$
مال كعب كعب	$س^{2} . س^{3} . س^{3} = س^{8}$
كعب كعب كعب	$س^{3} . س^{3} . س^{3} = س^{9}$
مال مال كعب كعب	$س^{2} . س^{2} . س^{3} . س^{3} = س^{10}$
مال كعب كعب كعب	$س^{2} . س^{3} . س^{3} . س^{3} = س^{11}$
كعب كعب كعب كعب	$س^{3} . س^{3} . س^{3} . س^{3} = س^{12}$
جزء الشىء	$\frac{1}{س} = س^{-1}$
جزء مال	$\frac{1}{س^{2}} = س^{-2}$
جزء كعب	$\frac{1}{س^{3}} = س^{-3}$ =

= وهكذا ، فلفظ جزء يعنى مقلوب ، أو بتعبيرنا الرياضى عكس إشارة الأس .

ومن الواضح أن حاصل ضرب أشياء مرفوعة إلى أسس متعددة يساوى الشيء مرفوعًا إلى أسٍّ يساوى مجموع أسس (أو قوى) الأشياء المضروبة فى بعضها البعض .

وقد أشار العاملى إلى أنَّ الجبريات تبنى على عناصر أو أجناس ثلاثة هى :

العدد : وهو ما لا يشتمل على الشيء أو المجهول

الأشياء : وهى المحتوية على المجهول : س

الأموال : وهى المحتوية على مربع المجهول أو الشيء : س^{٢}

وقد أورد العاملى جدولاً يبين حاصل ضرب وخارج قسمة هذه الأجناس .

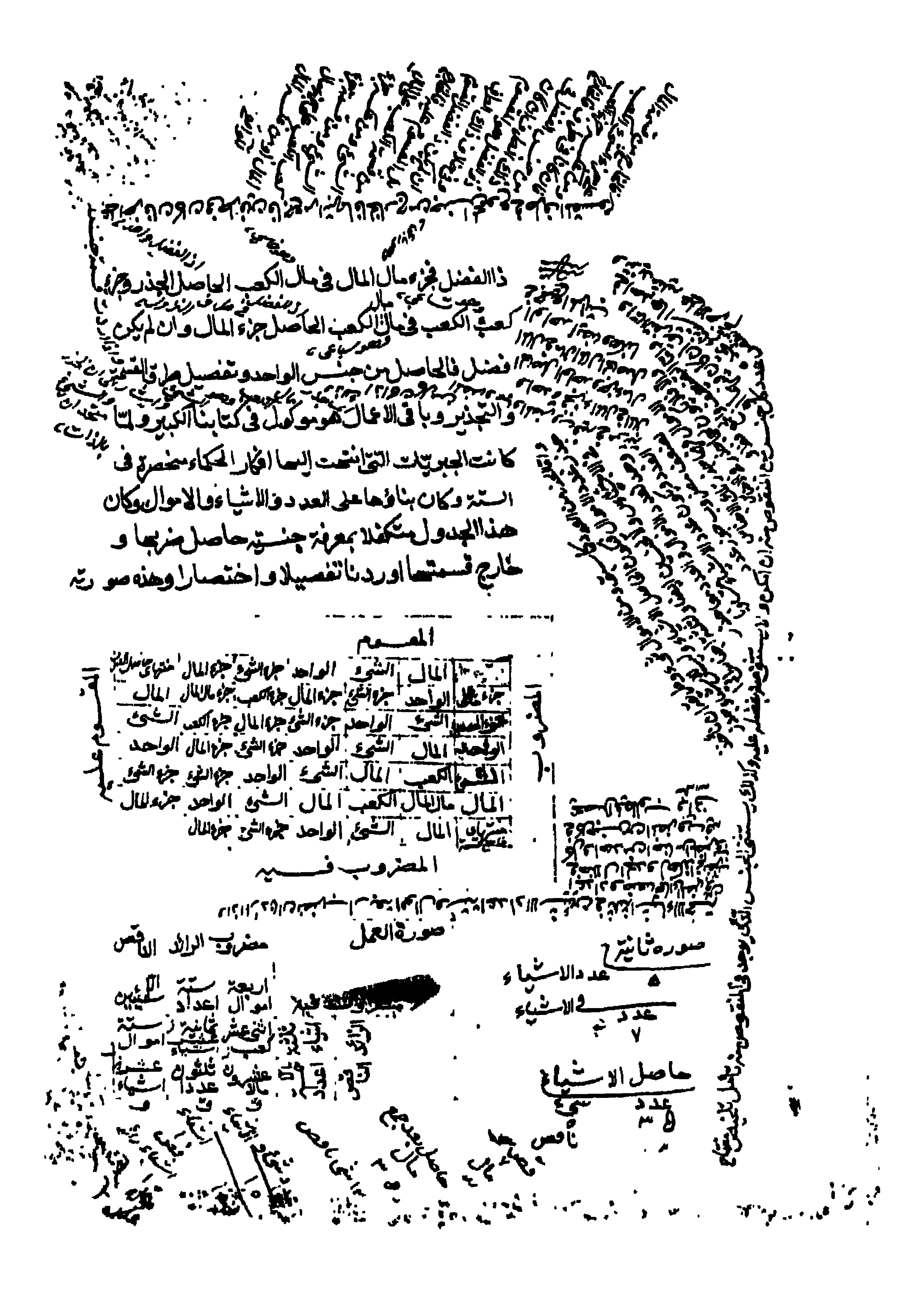
مراتب الصعود				مراتب النزول
	١			
شيء	٢	نِصف	جزء الشيء	١
مال	٤	رُبع	جزء مال	٢
كعب	٨	ثُمن	جزء كعب	٣
مال مال	١٦	نصف ثُمن	جزء مال مال	٤
مال كعب	٣٢	رُبع ثُمن	جزء مال كعب	٥
كعب كعب	٦٤	ثمن ثمن	جزء كعب كعب	٦
مال مال كعب	١٢٨	نصف ثمن ثمن	جزء مال مال كعب	٧
مال كعب كعب	٢٥٦	ربع ثمن ثمن	جزء مال كعب كعب	٨
كعب كعب كعب	٥١٢	ثمن ثمن ثمن	جزء كعب كعب كعب	٩
مال مال كعب كعب	١٠٢٤*	نصف ثمن ثمن ثمن	جزء مال مال كعب كعب	١٠
مال كعب كعب كعب	٢٠٤٨*	ربع ثمن ثمن ثمن	جزء مال كعب كعب كعب	١١
كعب كعب كعب كعب	٤٠٩٦*	ثمن ثمن ثمن ثمن	جزء كعب كعب كعب كعب	١٢

* في المخطوط ١٧٧٣ : ١٢ ، ٢٥ ، ٤٥٩٦ وهي أرقام محرّفة .
هذا الجدول في هامش المخطوط ٧٥٣ ، صفحة ٣٩ .



شكل (١٦)

الصفحة (٣٤) من مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب – رقم ١٢٥٣



ذا الفضل بجزء مال المال في مال الكعب الحاصل الجذر جزءا
كعب الكعب في مال الكعب الحاصل جزء المال وان لم يكن
فضل فالحاصل من جنس الواحد وتفصيل طرق
والتجذير وبافي الاعمال هو موكول في كتابنا الكبير ولما
كانت الجبريات التي انتهت اليها افكار الحكماء منحصرة في
الستة وكان بناؤها على العدد والاشياء والاموال وكان
هذا الجدول متكفلا بمعرفة جنسية حاصل ضربها و
خارج قسمتها اوردناه تفصيلا واختصارا وهذه صورته

المقسوم

[illegible]	المال	الشيء	الواحد	جزء الشيء	جزء المال	[illegible]
[illegible]	الواحد	جزء الشيء	جزء المال	جزء الكعب	جزء مال المال	المال
[illegible]	الشيء	الواحد	جزء الشيء	جزء المال	جزء الكعب	الشيء
الواحد	المال	الشيء	الواحد	جزء الشيء	جزء المال	الواحد
[illegible]	الكعب	المال	الشيء	الواحد	جزء الشيء	
المال	مال المال	الكعب	المال	الشيء	الواحد	جزء المال
[illegible]	المال	الشيء	الواحد	جزء الشيء	جزء المال	

المضروب فيه

صورة العمل

مضروب الزائد الناقص

صورة ثانية

عدد الاشياء ٥

عدد في الاشياء ٧

حاصل الاشياء

شكل (١٦) ب

الصفحة (٣٥) من مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب ـ رقم ١٢٥٣

يبدأ الضرب من هذا الجانب

يبدأ التقسيم من هذا الجانب

المقسوم

المضروب فيه						المقسوم عليه
	المال	الشيء	الواحد	جزىء الشيء	جزء المال	
جزء المال	الواحد	جزء الشيء	جزء المال	جزء الكعب	جزء مال المال	المال
حزء الشيء	الشيء	الواحد	جزء الشيء	جزء المال	جزء الكعب	التيء
الواحد	المال	الشيء	الواحد	جزء الشيء	جزء المال	الواحد
الشيء	الكعب	المال	الشيء	الواحد	جزء الشيء	جزء الشيء
المال	مال المال	الكعب	المال	التيء	الواحد	جزء المال
	المال	الشيء	الواحد	جزء التَيء	جرء المال	

المضروب

تضرب عدد[1] أحد الجنسين فى الآخر ، فالحاصلُ عددُ حاصلِ الضربِ من جنسِ الواقعِ فى ملتقى المضروبَيْن ، وإن كان استثناءً ويُسمَّى المستثنى منه زائدًا ، والمستثنى ناقصًا ، وضرب الزّائد فى مثله ، والنّاقِصِ فى مثله زايدٌ ، والمختلفين ناقصٌ ، فاضْرب الأجناسَ بعضَها فى بعضٍ ، واستثْن الناقصَ من الزائد ، فمضروبُ عشرةِ أعدادٍ وشىءٍ فى عشرة أعدادٍ إلاّ شيئًا مائة إلاّ مالاً ، ومضروبُ خمسةِ أعدادِ إلاّ شيئًا ، فى سَبْعَةِ أعدادِ إلاّ شيئًا ، خمسةٌ وثلاثون عددًا ومالٌ إلاّ اثنى عشر شيئًا ، ومضروبُ أربعةِ أموالٍ وستة أعداد إلاّ شيئين ، فى ثلاثة أشياء إلاّ خمسةَ أعدادٍ ، اثنا عشر كعبًا وثمانية وعشرون شيئًا إلاّ ستةً وعشرين مالاً (وإلاّ)[2] وثلاثين عددًا .

وفى القسمةِ يُطلب ما إذا ضُرِبَ فى المقسومِ عليه يساوى المقسومَ ، فيُقْسَمُ عدد

صورة العمل		الزايد [المضروب]		الناقص المضروب
مضروب فيه		أربعة أموال	ستة اعداد	إلاّ شيئين
الزايد	ثلاثة أشياء	اثنا عشر كعبًا زايدًا	ثمانية عشر شيئا زائداً	ستة أموال ناقصةً
الناقص	إلاّخمسة اعداد	عشرون مالاً ناقصاً	ثلاثون عدداً ناقصاً	عشرة[3] أشياء زايدة

(١) ناقصة فى المخطوطين ١٧٧٣ - ١٢٥٣ .

(٢) زائدة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٣) فى المخطوط ٧٥٣ : عشرون وهى مُحرَّفة .

جنس[١] المقسوم على[٢] عدد جنس المقسومِ عليه ، وعدد الخارج من جنس ما وقع فى ملتقى المقسومين .

---

(١) ، (٢) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

شرح : من الواضح أن حاصل ضرب الزائد فى مثله (أى فى الزائد) ، والناقص فى مثله (أى فى الناقص) زائد ، أما عند ضربْ الكميتين المختلفتين فى الإشارة فحاصل ضربهما ناقص (أى سالب) .

والأمثلة التى ساقها العاملى لبيان كيفية ضرب الأجناس فى بعضها البعض هى :

التعبير الوارد بالنص	المقابل الرياضى المعاصر
مضروب عشرة أعداد وشىء فى عشرة أعداد إلا شيئًا مائة إلاّ مالاً	(١٠ + س)(١٠ − س) = ١٠٠ − $س^{٢}$
مضروب خمسة أعداد إلا شيئًا ، فى سبعة أعداد إلاّ شيئًا ، خمسة وثلاثون عددًا ومالٌ إلاّ اثنى عشر شيئًا .	(٥ ـ س) (٧ ـ س) = ٣٥ + $س^{٢}$ ـ ١٢ س
مضروب أربعة أموال وستة أعداد إلاّ شيئين ، فى ثلاثة أشياء إلاّ خمسة أعداد ، اثنى عشر كعبًا وثمانية وعشرون شيئًا إلاّ ستةً وعشرين مالاً وثلاثين عددًا .	(٤$س^{٢}$ + ٦ − ٢ س) (٣س − ٥) = ١٢$س^{٣}$ + ٢٨ س − ٢٦ $س^{٢}$ − ٣٠

ويمكن تمثيل جدول صورة العمل لهذا المثال الأخير باستعمال الرموز الرياضية المعاصرة على الوجه التالى ، وهو مقابل تمامًا للجدول الوارد فى المخطوط :

صورة العمل		المضروب		
		الزايد		الناقص
المضروب فيه		٤ $س^{٢}$	+ ٦	ـ ٢ س
الزايد	٣ س	١٢ $س^{٣}$	+١٨ س	ـ ٦ $س^{٢}$
الناقص	ـ ٥	ـ ٢٠ $س^{٢}$	ـ ٣٠	+ ١٠ س

الفصل الثانى : فى المسائل السِّتِّ الجبريَّة

استخراج المجهولات بالجبْرِ والمُقَابلة يحتاج إلى نظرٍ ثاقبٍ ، وحَدْسٍ صائبٍ ، وإمْعان فكرٍ فيما أعطاه السائلُ ، وصرْفُ ذهنٍ فيما يؤدى إلى المطلوب من الوسائل ، فتفرضَ من[1] المجهول شيئًا ، وتعمل ماتضمَّنهُ السُّؤالُ سالكًا على ذلك المنوال لينتهى إلى المُعَادلة ، والطّرف ذو الاستثناءِ يُكَمَّلُ ، ويزاد مثل ذلك على الآخر ، وهو الجَبْر ، والأجناسُ المتجانسةُ المتساويةُ فى الطَّرفين تُسقط منهما ، وهو المُقَابلةُ ، ثمَّ المُعَادلةُ إمّا بين جنسٍ وجنسٍ ، وهى ثلاث مسائل تُسمَّى المُفردات ، أو بين[1] جنْسٍ وجنْسَين ، وهى ثلاثٌ أُخَر تُسمَّى المقترنات .

الأولى : من المفردات عددٌ يعدلُ أشياءَ ، فاقْسمْهُ على عَدَدِها يخرجُ الشَّىءُ المجهولُ[2] .

مثالها : أُقِرَّ لزيدٍ بألفٍ ونصفِ ما لعمرو ، ولعمرٍو بألفٍ إلاّ نصفَ ما لزيد ، فافرض ما لزيد شيئًا ، فلعمرٍو ألفٌ إلاّ نصفَ شىءٍ ، فلزيدٍ ألفٌ وخمسمائه إلاّ رُبْعَ شىءٍ يعدِلُ شيئًا ، وبعدَ الجَبْرِ ألفٌ وخمسمائة يعدل شيئًا ورُبْعًا ، فلزيدٍ ألفٌ ومائتان ، ولعمرٍو أربعمائة .

---

(١) زائدة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : فى هذا الفصل يعرض العاملى للصيغ الست المعروفة على وقته للمعادلات الجبرية من الدرجتين الأولى والثانية ، وقد قسمت هذه الصيغ الست إلى مجموعتين هى المفردات والمقترنات وبيانها كما يلى :

المسائل المفردات : وفيها جنسٌ مُفْردٌ يُعَادِلُ جِنسًا مُفْردًا آخر فحسب :

(١) عدد يعدل أشياء :

أى حـ = ب س   :   ∴ س = $\frac{حـ}{ب}$ =

= (٢) أشياء تعدل أموالاً :

أى ب س = أ $س^٢$: ∴ س = $\frac{ب}{أ}$

(٣) عدد يعدل أموالاً :

أى حـ = أ $س^٢$: ∴ س = $\sqrt{\frac{حـ}{أ}}$

فبالنسبة **للمفردة الأولى** ، نفرض ـ حسب المثال المبين ـ أن ما مع زيد س ، فيكون ما مع عمرو (١٠٠٠ − $\frac{س}{٢}$) ، ويكون ما مع زيد ١٠٠٠ + $\frac{١}{٢}$ (١٠٠٠ − $\frac{س}{٢}$) طبقًا لمعطيات المثال .

وبالتالى فإن ما لزيد هو س

كذا هو ١٠٠٠ + $\frac{١}{٢}$ (١٠٠٠ − $\frac{س}{٢}$)

ومن ثمَّ فإن هاتين الكميتين لابد وأن يكونا متساويين ، وبذلك نحصل على المعادلة :

س = ١٥٠٠ − $\frac{١}{٤}$ س

فبالجبر ١ $\frac{١}{٤}$ س = ١٥٠٠

∴ س = ١٢٠٠ = ما لزيد

أمّا ما لعمرو فيساوى (١٠٠٠ − $\frac{١٢٠٠}{٢}$) = ٤٠٠

الثانيـة : أشياء تعْدِلُ أموالاً ، فاقْسم عَدَدَ الأشياءِ على عددِ الأموال . فالخارجُ هو الشَّيءُ المجهولُ . مثالها : أوْلادٌ انتهبوا تركةَ أبيهم . وكانت دنانير . بأنْ أخذ الواحدُ دينارًا والآخر دينارين ، والآخر ثلاثةً ، وهكذا بتزايد واحد[1] ، فاستردَّ الحاكمُ ما أخذوه . وقسَّمه بينهم بالسَّوية . فأصَابَ كلَّ واحدٍ سبعةٌ ، فكمْ الأولاد والدّنانير . فافرض (الدّنانير)[2] شيئًا ، وخذ طرفيه أعني واحدًا وشيئًا . واضربه فى نصفِ الشيء يحصل نصْفُ مالٍ ونصْفُ شيءٍ ، وهو عددُ الدنانير . إذ[3] مضروبُ الواحدِ مع أىّ عددٍ فى نصْفِ العددِ يُساوى مجموعَ الأعدادِ المُتَواليةِ من الواحد إليه ، فاقْسِم عدَدَ الدّنانير على شىءٍ ، وهو عدَدُ الجماعةِ . لتخرج سبعةٌ كما قال السائلُ . فاضرب السَّبعة فى الشَّيءِ ، وهو المقسومُ عليه . يَحصل سبعةُ أشياء يعدلُ نصْفَ مالٍ ونِصْفَ شيءٍ . وبعد الجبْرِ والمُقابلةِ مالٌ يعدِلُ ثلاثة عشر شيئًا . فالشَّيءُ ثلاثة عشر . وهى عدد الأولاد ، فاضربه فى سبعةٍ . فالدنانيرُ أحدٌ وتسعون ، ولك استخراج هذه وأمثالها بالخطأين . كأن تَفْرض الأولاد خمسةً . فالخطأ[4] الأوّل أربعةٌ ناقصةٌ ، ثمّ تسعة ، فالثانى اثنان كذلك . فالمحفوظُ الأوّل عشرةٌ . والثّانى ستّة وثلاثون . والفضْلُ بينهما ستّةٌ وعشرون . وبين الخطأين اثنان .

وهنا طريقٌ آخر أسْهَلَ وأخْصَرَ هو أنْ يُضَعَّفَ خارجُ القسمةِ . فالحاصلُ إلاّ واحدًا عددُ[5] الأولادِ .

---

(١) فى المخطوط ١٧٧٣ : وهكذا يتزايد واحدًا واحدًا .

(٢) صحته عدد الأولاد . والتحريف واضح من سياق المثال .

(٣) فى المخطوط ١٧٧٣ : أو .

(٤) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

(٥) فى المخطوط ١٢٥٣ : أعداد .

شرح : فى مثال **المفردة الثانية** . نفرض أن عدد الدنانير موضوع التركة يساوى جـ ، وأن عدد الأولاد س .

فعند انتهاب التركة كان نصيب الأولاد يتبع متوالية حسابية تبدأ بالواحد ويزيد كلُّ حدّ فيها عن سابقه بواحدٍ . ومجموعُ هذه المتوالية هو بلا شك الدنانير جـ . =

$\therefore$ ١ + ٢ + ٣ + ... + س = حـ

حيث س عدد الأولاد.

ولما كان نصيبُ كلّ ولدٍ ـ عند تقسيم التركة بينهم بالتساوى ـ هو ٧ دنانير :

$\therefore$ حـ = ٧س (أى نصيب كل ولد × عدد الأولاد)

وحيث إن مجموع المتوالية الحسابية :

١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + س = $\frac{\text{س}}{٢}$ (س + ١)

$\therefore$ = حـ = ٧ س

وبالتالى نحصل على المعادلة :

$\frac{\text{س}}{٢}$ (س + ١) = ٧س

$\frac{\text{س}^٢}{٢}$ + $\frac{\text{س}}{٢}$ = ٧س (سبعة أشياء تعدل نصف مال ونصف شيء)

وبعد الجبر والمقابلة :

س = ١٣ = عدد الأولاد

. التركة بالدنانير = ١٣ × ٧ = ٩١ دينارًا

ويشير العاملى فى نهاية هذا المثال إلى تطبيق طريقة الخطأين فى حل المسألة.

أما الطريقة المختصرة التى يذكرها فى خاتمة المثال . فهى بلاشك معتمدة على المعادلة :

٧س = $\frac{\text{س}}{٢}$ (س + ١) أو (٧ × ٢ − ١) = س . حيث العدد ٧ هو خارج قسمة التركة بالتساوى بين الأولاد.

الثالثة : عددٌ يعْدِلُ أموالاً . فاقْسمه على عددها وجذِّر . الخارجُ الشَّىءُ المجهولُ .

مثالها : أُقِرَّ لزيدٍ بأكثرَ المَاليْن اللَّذين مجموعُهما عشرون . ومُسَطَّحُهما ستةٌ وتسعون ، فافرض أحدَهما عشرةً وشيئًا . والآخرَ عشرةً إلاَّ شيئًا . فسطَّحُها وهو مائةٌ إلاَّ مالاً يَعْدِلُ ستَّةً وتسعين ، وبعد الجبْر والمقابلة يعدل المالُ أربعةً . والشىءُ اثنان . فأحدُ[1] الماليْن ثمانيةٌ . والآخرُ اثنا عشر . وهو [المطلوب][2] .

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) زيدت ليستقيم المعنى .

شرح : فى مثال **المفردة الثالثة** المطلوب إيجاد عددين مجموعهما عشرون . وحاصل ضربهما ستة وتسعون .

يُفرض أحد العددين (١٠ + س)

فيكون الثانى (١٠ − س)

وهذا يحقق الشرط الأول وهو أن المجموع = ٢٠

أما الشرط الثانى فيعنى أن :

(١٠ + س)(١٠ − س) = ٩٦

أى أنَّ ١٠٠ − س^{٢} = ٩٦

فبعد الجبر والمقابلة : س^{٢} = ٤ . س = ٢

فيكون أحد العددين المطلوبين ٨ والثانى ١٢ .

المقترنة[1] الأولى من المقترنات

عددٌ يعدلُ أشياءً وأموالاً ، فكمِّل المالَ واحدًا إن كان أقلَّ منه[2] ، ورُدَّه إليه إن كان أكثر ، وحوِّل العدَدَ والأشياءَ إلى تلك النِّسبةِ بقسمةِ عددٍ كُلٍّ على عددِ الأموالِ ، ثمَّ رَبِّعْ نِصْفَ عددِ الأشياءِ ، وزِدْه على العددِ ، وانقُص من جذْرِ المجموعِ نصفَ عددِ الأشياءِ ليبقى (فى نفسه)[3] العددُ المجهولُ .

مثالهـا : أُقِرَّ لزيدٍ من العشرةِ بما مجموعُ مُربَّعهِ ومضروبه فى نصف باقيها اثنا عشر . فافرضه شيئًا ، فمربَّعهُ مالٌ ، ونصفُ القسمِ الآخر خمسةٌ إلاَّ نِصفَ شىءٍ . ومضروبُ الشىءِ فيه خمسةُ أشياء إلاَّ نصفَ مالٍ ، فنصفُ مالٍ وخمسةُ أشياء تعدلُ اثنى عشر ، فمالٌ وعشرةُ أشياء يعدل أربعةً وعشرين ، نقَصْنا نِصْفَ (عددِ الأشياء)[4] من جذْرِ مجموعِ مُربَّع نصفِ عددِ الأشياء والعددِ ، بقى اثنان ، وهو [المطلوب][5] .

---

(١) وردت فى المخطوطات مُحرَّفة تحت : المقرَّبة .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

(٣) زائدة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٥) زيدت ليكتمل المعنى .

شرح : المسائل المُقْترنات ، وفيها جنسٌ يعدلُ جنسين (مقترنين) لها نفس الإشارة الجبرية : فى هذه المجموعة الثانية من المعادلات ، وهى ثلاث مسائل ، تتم المعادلة فيها بين جنس وجنسين (بخلاف المسائل المفردات التى تكون المعادلة فيها بين جنسٍ وجنسٍ فحسب) . وهذه المسائل هى :

(١) عدد يعدل أشياءً وأموالاً :

أى $حـ = ب\ س + أ\ س^2$

(٢) أشياء تعدل عددًا وأموالاً :

أى $ب\ س = حـ + أ\ س^2$

(٣) أموالٌ تعدلُ عددًا وأشياء

أى $أ\ س^2 = حـ + ب\ س$

المقعرنة الأولى : يمكن شرح طريقة الحل بمقابلة النص مع الصيغة الرياضية بالرموز كما نألفها اليوم . وذلك كما يلى :

نصّ المخطوط	الصيغة الرياضية المقابلة
عدد يعدل أشياء وأموالاً	: $ح = ب س + أ س^2$
حوِّل العددَ والأشياء إلى تلك النسبة بقسمةِ عددِ كلٍّ على عددِ الأموال	: $\frac{ح}{أ} = \frac{ب}{أ} س + س^2$
ثمَّ ربِّع نصف عدد الأشياء وزده على العدد	: $\left(\frac{ب}{2 أ}\right)^2 + \frac{ح}{أ}$
وانقص من جذر المجموع نصف عدد الأشياء ليبقى العدد المجهول	: $س = \sqrt{\left(\frac{ب}{2 أ}\right)^2 + \frac{ح}{أ}} - \frac{ب}{2 أ}$

أى أن حل معادلة الدرجة الثانية :

$$أ س^2 + ب س = ح$$

هو
$$س = \frac{\sqrt{\left(\frac{ب^2}{2}\right) + أ ح} - \frac{ب}{2}}{أ}$$

وليس لبهاء الدين العاملى فضل فى هذا الحل الذى كان معروفًا قبله بحوالى ثمانية قرون .

والمقابل التحليلى لمثال المقترنة الأولى هو :

نصّ المخطوط	الصيغة الرياضية المقابلة
أقرَّ لزيد من العشرة بما مجموعُ مُربَّعِهِ ومضروبه فى نصف باقيها اثنا عشر	: $س^2 + س \left(\frac{10 - س}{2}\right) = 12$
فربَّعُه مالٌ . ونصفُ القسم الآخر خمسةٌ إلاَّ نصفَ شىءٍ . ومضروبُ الشىء فيه خمسةُ أشياء إلاَّ نصفَ مالٍ	: $س^2 + 5 س - \frac{1}{2} س^2 = 12$ =

المقترنة[1] الثانية : أشياءٌ تعدلُ عددًا وأموالاً ، فبعدَ التكميل أو الردّ تُنقص العَدَدَ من مُربَّع نِصْفِ عددِ الأشياء ، وتزيد جذْرُ الباقى على نصفِها ، أو تُنْقِصه منه ، فالحاصلُ هو الشّئُ المجهولُ .

مثالهـا : عددٌ ضُربَ فى نصْفِه ، وزيدَ على الحاصلِ اثنا عشر ، حصل خمسةُ أمثال العدد ، فاضْرب شيئًا فى نصْفه فنِصْفُ مالٍ ، مع اثنى عشر يعدل خمسةَ أشياء ، فمالٌ وأربعةٌ وعشرون يعدل عشرةَ أشياء ، فانقص الأربعةَ والعشرين من مُربَّع الخمسة يبقى واحدٌ ، وجذره واحدٌ ، فإنْ زدته على الـخمسة أو نقصته منها يحصلُ المطلوبُ .

الثالثـة : أمْوالٌ تعدلُ عددًا وأشياء ، فبعد التكميل أو الردِّ تزيد مُربَّع نصفِ عددِ الأشياء على العددِ ، وجذِّر المجموع [وزده][2] على نِصْفِ عددِ الأشياء ، فالمُجتمِعُ الشّئُ المجهولُ .

مثالُهـا : عددٌ نُقص من مُربَّعه وزيدَ الباقى على المُربَّع حصل عشرة ، نقصْنا من المال الأول[3] شيئًا ، وكمَّلنا العملَ صار مالَيْن إلاّ شيئًا تعدلُ عشرةً ، وبعد الجبْر

---

(١) وردت فى المخطوطات مُحرَّفة تحت : المقرَّبة

(٢) أضيفت ليتم المعنى ويتسق مع المثال المعطى .

(٣) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

= فنصفُ مالٍ وخمسةُ أشياء تعدلُ اثنى عشر : $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٥ س = ١٢$

فمالٌ وعشرةُ أشياء يعدلُ أربعةً وعشرين : $س^{٢} + ١٠ س = ٢٤$

نقصْنا نصفَ عددِ الأشياء من جَذْر مجموع مُربَّع نصفِ عددِ الأشياء والعددِ ، بقى اثنان ، وهو المطلوب : $س = \sqrt{(\frac{١٠}{٢})^{٢} + ٢٤} - \frac{١٠}{٢}$

$= \sqrt{٤٩} - ٥ = ٢$

إذن فما أقِرَّ به لزيد من العشرة هو اثنان .

والردّ مالٌ يعدلُ خمسةَ أعدادٍ ونصفَ شيءٍ ، فمربّعُ نصفِ عددِ الأشيآء مُضافًا إلى الخمسة خمسةٌ ونصفُ ثُمْنٍ ، جذْره اثنان وربع ، تزيد عليه رُبْعًا يحصُل اثنان ونصف وهو المطلوب .

شرح : يمكن تمثيل **المقترنة الثانية** بالرموز الرياضية المعاصرة على الوجه التالى :

أشياء تعدل عددًا وأموالاً : $\text{ب س} = \text{حـ} + \text{أ س}^{2}$

والحل كما ورد فى النصّ :

فبعد التكميل أو الردّ : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} = \frac{\text{حـ}}{\text{أ}} + \text{س}^{2}$

تُنقص العددَ من مربّعِ نصْفِ عددِ الأشياء : $\left(\frac{\text{ب}}{\text{٢ أ}}\right)^{2} - \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$

وتزيد جذر الباقى على نصفها ، أو تنقصه منه $\frac{\text{ب}}{\text{٢ أ}} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{\text{٢ أ}}\right)^{2} - \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}}$

فالحاصل هو الشيء المجهول : $\text{س} = \frac{\text{ب}}{\text{٢ أ}} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{\text{٢ أ}}\right)^{2} - \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}}$

فى مثال المقترنة الثانية :

نفرض العددَ المجهولَ : س

فتكون المعادلة طبقًا لمنطوقِ النصّ : $\frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} + ١٢ = ٥\,\text{س}$

فمالٌ وأربعةٌ وعشرون يعدل عشرةَ أشياء : $\text{س}^{٢} + ٢٤ = ١٠\,\text{س}$

فانقص الأربعةَ والعشرين من مربّع الخمسة

يبقى واحدٌ ، وجذرُهُ واحدٌ : $\sqrt{\left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢} - ٢٤} = ١$

فإنْ زدْته على الخمسة أو نقصته منها يحصل المطلوب : $\text{س} = \left(\frac{١٠}{٢} \pm ١\right)$

أى أن : $\text{س} = ٦ \text{ أو } ٤$

ونحن نعلم أن المعادلة : $س^٢ - ١٠ س + ٢٤ = صفرًا$

يمكن وضعها على الصورة : $(س - ٦) (س - ٤) = صفرًا$

وبالتالى فالقيمتان المحققتان لها هما : س = ٦ أو س = ٤

أما المقرنة الثالثة

فالصيغة الرياضية لها هى :

أموال تعدل عددًا وأشياء : $أ س^٢ = حـ + ب س$

وخطوات الحل هى :

فبعد التكميل أو الردّ : $س^٢ = \frac{حـ}{أ} + \frac{ب}{أ} س$

تزيد مُربَّع نصفِ عدد الأشياء على العدد : $\left(\frac{ب}{٢ أ}\right)^٢ + \frac{حـ}{أ}$

وجذِّر المجموع [وزده] على نصف عدد الأشياء : $\sqrt{\left(\frac{ب}{٢ أ}\right)^٢ + \frac{حـ}{أ}} + \frac{ب}{٢ أ}$

فالمجتمع الشىء المجهول : $س = \sqrt{\left(\frac{ب}{٢ أ}\right)^٢ + \frac{جـ}{أ}} + \frac{ب}{٢ أ}$

فى المثال الذى ساقه العاملى لهذه المقرنة :

نفرض العدد المطلوب إيجاده س

فتكون المعادلة حسب معطيات المثال : $س^٢ - س + س^٢ = ١٠$

(نقصْنا من المال الأول شيئًا ، وكمَّلنا العملَ

صار مالَيْن إلاّ شيئًا تعدلُ عشرةً)

وبعد الجبْر والردِّ مالٌ يعدلُ خمسة أعدادٍ

ونصف شىءٍ : $س^٢ = ٥ + \frac{١}{٢} س$

فربِّعْ نصف عدد الأشياء مضافًا إلى الخمسة .

خمسةٌ ونصفُ ثمْنٍ . : $\left(\frac{١}{٤}\right)^٢ + ٥ = ٥ \frac{\frac{١}{٢}}{٨}$

جذْره اثنان وربع $\sqrt{\frac{٨١}{١٦}} = \frac{٩}{٤} = ٢ \frac{١}{٤}$

تزيد عليه رُبْعًا [وهو نصف عدد الأشياء]

يحصُل اثنان ونصف . وهو المطلوب : $س = \frac{١}{٤} ٢ + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} ٢$

والنتيجة صحيحة ويمكن الحصول عليها بالتعويض المباشر فى المعادلة السابقة مباشرة على المثال بالقيم : $أ = ١$ ، $ب = \frac{١}{٢}$ ، $حـ = ٥$

هذا ومن الممكن وضع معادلة الدرجة الثانية فى الصورة العامة :

$$أس^{٢} + ب س + حـ = صفرًا$$

ويكون حلها العام على الوجه التالى :

$$س = - \frac{ب}{٢ أ} \pm \sqrt{\left(\frac{ب}{٢ أ}\right)^{٢} - \frac{حـ}{أ}}$$

أمّا المقرنات الثلاث فما هى إلاً حالات خاصة من هذه الحالة العامة ، يمكن التوصل إليها بتغيير إشارة جـ أو ب أو كليهما على التوالى إلى الإشارة السالبة .

الباب التاسع

فى قواعد شريفة وفوائد لطيفة لابدّ للمحاسب منها ولا غناء[1] له[2] عنها[3]

ولنقتصر فى هذا المختصر على اثنى عشر :

الأولى :

وهى مماسنح بخاطرى العابر[4] .

إذا أردْتَ مضرُوبَ عَدَدٍ فى نفسهِ وفى جميع ماتحته من الأعدادِ . فزِدْ عليه واحدًا ، واضرب المجموعَ[5] فى مُربَّعِ العددِ ، فنصفُ الحاصِلِ هو المطلوبُ .

مثالها : أردنا مضروبَ التِّسعةِ . كذلك[6] ضَربْنا العشرةَ فى أحدٍ وثمانين . فالأربعمائة والخمسة هى المطلوب .

---

(١) فى المخطوط ١٧٧٣ : غنى .
(٢) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .
(٣) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .
(٤) فى المخطوطين ١٢٥٣ - ١٧٧٣ : الفاتر .
(٥) فى المخطوط ٧٥٣ : المجتمع .
(٦) فى المخطوط ١٢٥٣ : كذا .

شرح : يمكن التعبير عن القاعدة الأولى بالرموز الرياضية المعاصرة على الوجه التالى :

$$ن [ن + (ن - ١) + ... + ٣ + ٢ + ١] = \frac{(ن + ١) . ن^٢}{٢} =$$

ويتضح من الطرف الأيمن للمعادلة أن المطلوب إيجاد حاصل ضرب العدد ن فى حاصل جمع الأعداد بتسلسلها الطبيعى حتى العدد ن .

ولإيجاد مجموع المتوالية الحسابية : [١ + ٢ + ٣ + ... + (ن - ١) + ن] نلاحظ أن مجموع العدد الأول والأخير من هذه المتوالية هو (١ + ن) ، كذلك فإن مجموع العدد الثانى والعدد قبل الأخير من نفس المتوالية هو :

٢ + (ن - ١) = (١ + ن)

وهكذا يبقى المجموع ثابتًا حيث إن الزيادة التى تطرأ على العدد الثانى مثلاً تساوى النقص الذى يطرأ على العدد قبل الأخير من المتوالية ، ومن ثمَّ يكون مجموع المتوالية الحسابية هذه هو (١ + ن) مضروبًا فى عدد أزواج الأعداد التى ينتج من مجموع كل زوج منها (١ + ن) ، ومن الواضح أن عدد هذه الأزواج هو نصف العدد الكلىّ لحدود المتوالية أى $\frac{١}{٢}$ن .

∴ مجموع المتوالية الحسابية [١ + ٢ + ٣ + ... + (ن - ١) + ن]
هو : (ن + ١) . $\frac{ن}{٢}$

ويكون حاصل ضرب أى عدد ن فى المتوالية الحسابية من الواحد حتى العدد نفسه ن هو :

$$(ن + ١) . \frac{ن}{٢} \times ن = \frac{ن^٢}{٢} (ن + ١)$$

مجموع المتوالية الحسابية

وهو ما جاء بالقاعدة الأولى .

والمثال الذى ضربه العاملى هو مضروب ٩ فى مجموع الأرقام من التسعة إلى الواحد أى ٩ (٩ + ٨ + ٧ + ٦ + ٥ + ٤ + ٣ + ٢ + ١)

$$\frac{(٩ + ١) \times ٩^٢}{٢} = ٤٠٥$$ وهو صحيح .

الثـــانية :

إذا أردْت جمْعَ الأفراد على النَّظْمِ الطَّبيعيِّ ، فزد الواحدَ على الفرْدِ الأخيرِ ، وربِّع نصْفَ المجتمِعَ .

مثالهـا : إذا قيل[1] جمعُ الأفرادِ من الواحدِ إلى التِّسعةِ :

فالجوابُ خمسةٌ وعشرون .

---

(١) ناقصة فى المخطوطين ١٢٥٣ ، ١٧٧٣ .

شرح : تتناول القاعدة الثانية جمع الأعداد المفردة حسب تسلسلها الطبيعى بدءاً من الواحد . ويمكن تمثيلها بالمعادلة :

$$١ + ٣ + ٥ + ٧ + \cdots\cdots + (ن - ٢) + ن = \left[\frac{ن + ١}{٢}\right]^{٢}$$

حيث ن عدد مفرد صحيح .

ولقد ساق العاملى مثالاً هو جمع الأفراد من الواحد حتى التسعة :

$$١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ = ٢٥ \quad : \quad ن = ٩$$

$$\cdot \quad \left[\frac{ن + ١}{٢}\right]^{٢} = \left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢} = ٢٥$$

فالقاعدة إذن صحيحة .

مثال آخر هو جمع الأفراد على النظم الطبيعى حتى ١٩ ، فالجواب هو :

$$١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ + ١٥ + ١٧ + ١٩ = ١٠٠$$

وحيث إن $ن = ١٩$

$$\therefore \quad \frac{ن + ١}{٢}^{٢} = ١٠٠$$ فالقاعدة صحيحة .

الثالثـة :

جَمْعُ الأزواجِ دونَ الأفرادِ :

تضرب نصف الزوْجِ الأخيرِ فيما يليه بواحدٍ .

مثالهـا : من الاثنين إلى العشرةِ : ضربْنا الخمْسةَ في الستَّةِ .

شرح : تتعرَّض القاعدة الثالثة لجمع الأعداد الزوجية حسب تسلسلها الطبيعي ، فتقول إن حاصل الجمع يساوى نصف العدد الزوجى الأخير فى المسلسلة مضروبًا فى العدد التالى لنصف هذا العدد الزوجى الأخير ، وتمثل هذه القاعدة رياضيًّا على الوجه التالى :

$$٢ + ٤ + ٦ + ٨ + \cdots\cdots + (ن - ٢) + ن = \frac{ن}{٢} . (\frac{ن}{٢} + ١)$$

حيث ن عدد زوجى صحيح .

والمثل الذى ضربه العاملى لهذه القاعدة هو مجموع الأعداد الزوجية من ٢ إلى ١٠ .

$$٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٣٠$$

وحيث إن ن = ١٠ فالمجموع حسب هذه القاعدة = $\frac{١٠}{٢} (\frac{١٠}{٢} + ١) = ٣٠$

ونقدم مثلاً ثانيًا هو مجموع الأعداد الزوجية حتى ٢٢ فنجد أن :

$$٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ١٢ + ١٤ + ١٦ + ١٨ + ٢٠ + ٢٢ = ١٣٢$$

ولما كانت ن = ١٨ فى هذا المثال ، فإن مجموع هذه المتوالية طبقًا للقاعدة الثالثة هو $\frac{٢٢}{٢} (\frac{٢٢}{٢} + ١) = ١١ \times ١٢ = ١٣٢$

مما يؤيد سلامة القاعدة المذكورة .

الرابعـة :

جَمْعُ المربَّعَات المتوالية : تزيد واحدًا على ضِعْفِ العددِ الأخيرِ ، وتضربَ ثُلُثَ المجتمِعِ فى مجموعِ تلك الأعداد .

مثالهـا : مُربّعَاتُ الواحِدِ إلى الستة[1] : زِدْنا على ضِعْفِها[2] واحدًا ، وثُلُثُ الحاصِلِ أربعةٌ وثلثٌ ، فاضْرِبْه فى مجموعِ تلك الأعدادِ ، وهو أحدٌ وعشرون ، فالواحِدُ وتسعون[3] جوابٌ .

---

(١) فى المخطوط ١٧٧٣ : ستة .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : ضعف الستة .

(٣) فى المخطوط ١٧٧٣ : والتسعون .

شرح : تبين القاعدة الرابعة كيفية جمع مربعات الأعداد حسب تسلسلها الطبيعى وتتخذ الصيغة الرياضية الآتية :

$$(١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + \cdots + ن^٢) = \frac{(٢ ن + ١)}{٣}[١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن]$$

فى المثال الوارد فى النصّ يُعطى العاملى مجموع مربعات الواحد إلى الستة فيقول إن

$$(١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ٥^٢ + ٦^٢)$$

يساوى $\frac{٦ \times ٢ + ١}{٣} (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦) = ٤ \frac{١}{٣} \times ٢١ = ٩١$

وهو المجموع الصحيح .

وكمثال آخر نختبر صحّة القاعدة بالنسبة لمجموع مربعات الأعداد حتى العدد ١٣ ، أى بالنسبة لـ ن = ١٣ فالمجموع = $\frac{(٢ \times ١٣ + ١)}{٣}$ [١ + ٢ + ٣ + ... + ١٣]

= ٩ × ٩١ = ٨١٩ وهو فعلاً مجموع مربعات الأعداد من ١ حتى ١٣ .

وبالرجوع إلى المعادلة الرياضية الممثلة للقاعدة الرابعة نجد أن الطرف الأيسر للمعادلة يشتمل على مجموع المتوالية الحسابية من الواحد حتى العدد ن ، وحيث إن مجموع هذه المتوالية = $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$ كما تقدم شرحه فى القاعدة الأولى ، فإنه من الممكن وضع القاعدة الرابعة على النحو التالى :

$$= (١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + \cdots + ن^٢)$$

$$= \frac{(٢ ن + ١)}{٣} \cdot \frac{ن (ن + ١)}{٢}$$

$$= \frac{ن (ن + ١) (٢ ن + ١)}{١ \times ٢ \times ٣}$$

وهى الصيغة التى نألفها فى كتبنا الرياضية المعاصرة .

ولعلّ أبا بكر فخر الدين محمد بن الحسن الكرخى الحاسب (المتوفى عام ١٠٢٩ م) أول من برهن القوانين الخاصة بمجموع المتوالية المشتملة على مربعات الأعداد الطبيعية ، كذا مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية ، وهذا المجموع الأخير هو موضوع القاعدة الخامسة الآتية .

الخامسة :

جَمْعُ المكعَّباتِ المتوالية : تُربِّع مجموعَ تلكَ الأعدادِ المتواليةِ من الواحد .

مثالها : مُكعَّباتُ الواحدِ إلى الستَّةِ : ربَّعْنا الأحَدَ والعشرين ، فالأربعمائة واحدٌ وأربعون جواب .

شرح : المقابل الرياضى للقاعدة الخامسة هو :

$$(١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \cdots\cdots + ن^{٣}) = (١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن)^{٢}$$

وبتطبيقه على مجموع مكعَّبات الواحد إلى الستة ، فإننا نجده مساويًا لـ $(٢١)^{٢}$ = ٤٤١ .

ولما كان الطرف الأيسر من المعادلة هو مربع مجموع المتوالية الحسابية من الواحد إلى العدد ن ، ولما كان مجموع هذه المتوالية ـ بالرجوع إلى القاعدة الأولى ـ يساوى

$$\frac{ن\,(ن + ١)}{٢}$$

فإنه يمكن وضع القاعدة الخامسة على الصورة :

$$(١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \cdots\cdots + ن^{٣}) = \left[\frac{ن\,(ن + ١)}{٢}\right]^{٢}$$

وهى المعادلة التى نستعملها اليوم لإيجاد مجموع مكعبات الأعداد بتسلسلها الطبيعى .

السادسة :

إذا أردْتَ مُسَطَّح جَذْرَىْ عددَيْن مُنْطَقَيْن أو أَصَمَّيْن أو مختلفين :

فاضْرِبْ أحَدَهُما فى الآخرِ ، وجَذْرُ المجتمِعِ جوابٌ .

مثالها :

مُسطَّح جَذْرَىِ الخمسةِ مع العشرين : فجذْرُ المائةِ جوابٌ .

* * *

السابعة :

إذا أردْتَ قِسْمةَ جذْرِ عددٍ على جذْرِ آخر :

فاقْسِم أحَدَ العددَيْن على الآخر ، وجذْرُ الخارجِ جوابٌ .

مثالها :

جذْرُ مائة على جذْرِ خمسةٍ وعشرين : فجذْرُ الأربعةِ جوابٌ .

شرح القاعدة السادسة : إذا رمزنا للعددين المنطقين أو الأصمَّين بالرمزين م ، ن فإنَّ القاعدة تنص على ما يلى :

$\sqrt{م} . \sqrt{ن} = \sqrt{م . ن}$ وهذا صحيح .

(ملحوظة : كلمة «مسطَّح» الواردة فى النص تعنى حاصل ضرب)

مثاله : $\sqrt{٥} \times \sqrt{٢٠} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

* * *

شرح القاعدة السابعة : بفرض العددين فى القاعدة السابعة م ، ن ، فإنه يمكن تمثيل منطوق القاعدة رياضيًا على الوجه التالى :

$\frac{\sqrt{م}}{\sqrt{ن}} = \sqrt{\frac{م}{ن}}$ وهذا صحيح تمامًا ومكمِّل للقاعدة السادسة

مثاله : $\frac{\sqrt{١٠٠}}{\sqrt{٢٥}} = \sqrt{\frac{١٠٠}{٢٥}} = \sqrt{٤} = ٢$

الثـامنة :

إذا أردْتَ تحصيلَ عددٍ تامٍ ، وهو المساوى أجزاْه . أى[1] مجموعَ الأعدادِ العادّةِ له :

فاجْمع أعداداً متواليةً[2] من الواحد على التّضاعفِ . فالمجموعُ إن كان لايعدّه غير الواحدِ ، فاضْرِبْه فى آخرِها . فالحاصلُ تامٌّ .

مثالهـا :

جمعنا الواحدَ والاثنين والأربعة ، وضربنا السّبعةَ فى الأربعةِ . فالثمانيةُ والعشرون عددٌ تامّ .

القاعدة الثـامنة :

(١) فى المخطوطين ٧٥٣ . ١٢٥٣ : وهى .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : الأعداد المتوالية .

شرح : تختص القاعدة الثامنة بخواص العدد التام ، والعدد التام هو ذلك العدد الذى يساوى مجموع الأعداد المكونة له العدد نفسه .

مثال العدد التام العدد ٦ حيث إن مكوناته أو عوامله هى ١ . ٢ . ٣ ومجموعها ٦ . وبالتالى فالعدد ٦ عدد تام .

أما إذا نقص العدد عن مجموع مكوناته فالعهد ناقص ، وإن زاد فهو عدد زائد ، فمثال العبد الناقص العدد ١٢ حيث إن مجموع مكوناته هو :

(١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٦) = ١٦ . فالعدد ١٢ ينقص عن مجموع مكوناته وبالتالى فهو عدد ناقص .

أما مثال العدد الزائد فهو العدد ٨.حيث إن مجموع مكوناته هو :

(١ + ٢ + ٤) = ٧ ، وبالتالى فالعدد ٨ عدد زائد حيث إنه يزيد على مجموع عوامله .

ولا شك أن الوقوف على فكرة العدد التام يرجع إلى عهد بعيد حيث إن الهنود كانوا على علم بها قبل الإغريق . =

= هذا وقد ورد عن العالم الإغريقى نيكوماخوس Nicomachus (حوالى عام ١٠٠م) قوله فى الأعداد التامة :

«..... فإن الأعداد الزائدة والأعداد الناقصة توجد بكثرة وبغير انتظام أو ترتيب ، ويتم اكتشافها بغير نظام .

ولكن الأعداد التامة يسهل حصرها ، وتقع فى ترتيب محدد ، وذلك لوقوع عدد تام واحد منها فى الآحاد هو العدد ٦ ، وعدد واحد فى العشرات هو ٢٨ ، وعدد واحد فى جميع المئات هو ٤٩٦ ، وعدد واحد فى المدى الواسع من الآلاف وعلى مشارفها ، فهو قريب من عشرة آلاف ، وهو العدد ٨١٢٨ ، ويتسم انتظام الأعداد التامة بانتهائها بواحد فقط من الرقمين ٦ ، ٨ فى خانة الآحاد ، والأعداد التامة تكون دائمًا أعدادًا زوجية . » .

كذلك فقد اهتم اقليدس بالأعداد التامة فخصَّها بباب مستقل فى مؤلفه «الأصول» .

ويقدم العاملى هنا قاعدة لتعيين الأعداد التامة ، فيشير إلى المتوالية الهندسية التى أساسها ٢ ، وهى ما عبَّر عنه فى النصِّ بالأعداد المتوالية من الواحد على التضاعف أى المتوالية الهندسية :

١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ... وهكذا بحيث إنَّ كل حدٍّ فى المتوالية يساوى ضِعْفَ الحدِّ الذى يسبقه .

يقول العاملى بأنه إذا جمعت عدة حدود بدءًا من الواحد ، فكان مجموع هذه الحدود عددًا أوّليًا ، فإنَّ هذا المجموع مضروبًا فى العدد الأخير من هذه المجموعة يكون عددًا تامًا .

وطبقًا لهذه القاعدة فالعدد التام الأول هو الواحد .

أما العدد التام الثانى فيحصل عليه ـ حسب هذه القاعدة ـ من الحدين الأولين للمتوالية الهندسية التى أساسها ٢

∴ ١ + ٢ = ٣ وهو عدد أوّلى

=

= وبذلك يكون العدد التام الثانى هو ٣ × ٢ = ٦ وهذا صحيح .

وبالنسبة للعدد التام الثالث فإنّه طبقًا للقاعدة التى نحن بشأنها يتأتى من الحدود الثلاثة الأولى للمتوالية :

١ + ٢ + ٤ = ٧ وهو عدد أولى

فيكون العدد التام الثالث هو ٧ × ٤ = ٢٨ وهذا صحيح أيضًا وهو ما ساقه العاملى تدليلاً على صحة القاعدة الثامنة .

يمكننا باتباع هذه القاعدة أن نحصل على العدد التام الرابع من الحدود الخمسة الأولى للمتوالية ، هكذا :

١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ = ٣١ وهو عدد أولى

إذن فالعدد التام الرابع وهو حاصل ضرب مجموع الحدود فى الحد الأخير من هذه المجموعة = ٣١ × ١٦ = ٤٩٦ وهو عدد تام فعلاً

كذلك فإنَّ العدد التام الخامس يجىء من جمع الحدود السبعة الأولى من المتوالية :

١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ = ١٢٧ وهو عدد أولى

فيكون العدد التام الخامس هو ١٢٧ × ٦٤ = ٨١٢٨ وهو صحيح تمامًا

أما العدد التام التالى ـ وهو ما لم يرد فى أقوال نيكوماخوس ـ فإنه ينتج ـ بتطبيق القاعدة التى ذكرها العاملى ـ من الحدود الثلاثة عشر الأولى من المتوالية :

١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ + ٢٥٦ + ٥١٢ + ١٠٢٤ + ٢٠٤٨ + ٤٠٩٦ = ٨١٩١

وحيث إن هذا المجموع عدد أولى ، فإن العدد التام السادس هو

٨١٩١ × ٤٠٩٦ = ٣٣٥٥٠٣٣٦

وبالمثل فإن العدد التام السابع يمكن الحصول عليه من واقع الحدود السبعة عشر الأولى من المتوالية : =

= ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ + ٢٥٦ + ٥١٢ + ١٠٢٤ + ٢٠٤٨
+ ٤٠٩٦ + ٨١٩٢ + ١٦٣٨٤ + ٣٢٧٦٨ + ٦٥٥٣٦ = ١٣١٠٧١

ولما كان هذا المجموع عددًا أوليًّا ، فإنه طبقًا للقاعدة يكون حاصل الضرب :
١٣١٠٧١ × ٦٥٥٣٦ = ٨ ٥٨٩ ٨٦٩ ٠٥٦ عددًا تامًّا
فالقاعدة التى أوردها العاملى صحيحة حتى البلايين على الأقل .

ومن الملاحظ أن الأعداد التامة (فيما عدا الواحد) أعداد زوجية ينتهى رقم الآحاد فيها إمّا بالرقم ٦ ، وإمّا بالرقم ٨ .

هذا ويُنسب إلى إقليدس أنه قد أثبت فى كتابه «الأصول» أن العدد التام يكون على الصورة :

$$٢^{ن - ١} (٢^{ن} - ١)$$

طالما كان المقدار (٢ ن – ١) عدداً أوليا .

وقد أمكن – حتى الآن – الوقوف على ١٢ عددًا تامًّا تنشأ من قيم ن التالية :

ن = ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٦١ ، ١٠٧ ، ١٢٧ ، ٢٥٧

كذلك فقد أمكن باستخدام الحاسبات الالكترونية إضافة خمسة أعداد أخرى .

هذا ونود أن نشير هنا إلى أن قاعدة إيجاد الأعداد التامة التى أشار إليها العاملى قد سبقه إليها نيقوماخس الجاراسينى فى مؤلفه «كتاب المدخل إلى علم العدد» الذى ترجمه ثابت بن قُرّة ، وعُنى بنشره وتصحيحه الأب ولهلم كوتش اليسوعى (المطبعة الكاثوليكية ببيروت سنة ١٩٥٨) وفيه يورد نيقوماخس هذه القاعدة فى الصفحة ٣٩ من ترجمة ثابت بن قرة كما يلى :

«والوجه فيه على ما أصف ينبغى إذا أردنا ذلك أن نضع أزواج الأزواج المتوالية المبتدية من الواحد فى سطر واحد حتى ينتهى منها حيث ما أردنا ، ثم نجمع تلك الأعداد ونزيدها بعضها على بعض واحدًا واحدًا على تواليها ، وكلما زدنا واحدًا منها نظرنا إلى العدد المجتمع من الأعداد أى عدد هو ، فإن نحن وجدناه من الأعداد الأول =

التى ليست مركبة ضربناه فى آخر الأعداد التى جمعت ، فما اجتمع فهو أبدًا عدد تام ، وإن نحن لم نجد العدد الذى كان اجتمع من جمع أزواج الأزواج عددًا أولاً لكن ثانيًا مركّبا لم نضربه فى شىء ، لكنا نزيد عليه العدد الذى يتلوا الأعداد التى قد جمعنا من أزواج الأزواج ، ثم ننظر إلى حال العدد الذى اجتمع لنا . فإن وجدناه ثانيًا مركّبًا لم نضربه فى شىء ، وتجاوزنا ذلك إلى ما بعده ، فإن وجدناه أولاً غير مُركّب ضربناه فى آخر الأعداد التى كنّا جمعنا ، فما اجتمع فهو أبدًا عدد تام ، وإذا أنت فعلت مثل ذلك دايمًا تولدت الأعداد التامة كلها على الولا من غير أن يشذّ عنك شىء منها . » .

التاسعة :

إذا أردْتَ تحصيلَ مَجْذُورٍ يكون نسبتُه إلى جذْرِهِ كنسبةِ عددٍ معيَّنٍ إلى آخر : فاقْسِمِ الأوّلَ على الثّاني ، فمجْذُورُ الخارِجِ هو العَدَدُ .

مثالها :

مجذورٌ نسبته إلى جذْرِهِ كنسبةِ الاثنى عشر إلى الأربعة : فالجوابُ ـ بعدَ قسمةِ الاثنى عشر على الأربعة ـ تسعةٌ ، ولو قيل كنسبةِ الاثنى عشر إلى التسعةِ ، فالجوابُ واحدٌ وسَبْعةُ أتْساعٍ ، لأنَّ جَذْرَهُ واحدٌ وثُلُثٌ .

شرح : يمكن التعبير عن القاعدة التاسعة رياضيًّا على الوجه التالى :

إذا كان $\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ع}}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$. فإنّ $\text{ع} = \left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)^{٢}$

وهذا صحيح ، حيث إنه بتربيع طرفى المعادلة (ويُعبَّر عن التربيع فى هذا النص بالتجذير) نحصل على النتيجة وهى $\text{ع} = \left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)^{٢}$.

فى المثال الأول الذى قدمه العاملى لهذه القاعدة نجد أن :

$\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ع}}} = \frac{١٢}{٤} = ٣ \therefore \text{ع} = ٣^{٢} = ٩$

وفى المثال الثانى : $\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ع}}} = \frac{١٢}{٩} = ١\frac{١}{٣}$ ، $\text{ع} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٩} = ١\frac{٧}{٩}$

العاشـرة :

كلُّ عددٍ ضُرِبَ فى آخرَ ، ثُمَّ قُسِمَ عليه ، وضُرِبَ الحاصلُ فى الخارجِ ، حَصُل مساوى مُربَّع ذلك العددِ .

مثالهـا :

ضربنا مضْرُوبَ التّسعةِ فى الثلاثة فى الخارجِ من قسمتِها عليها[1] ، حَصُلَ واحدٌ[2] وثمانون .

---

(١) فى المخطوط ١٧٧٣ : عليه .
(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : أحد .

شرح : لنرمز فى القاعدة العاشرة للعددين بالرمزين م ، ن

∴ الحاصل (وهو ما ينتج من ضرب م × ن) = م × ن

والخارج (أى الخارج من قسمة م على ن) = $\frac{م}{ن}$

فبضرب الحاصل فى الخارج نحصل على :

(م × ن) × $\frac{م}{ن}$ م^{٢} أى مربع العدد الأول م

وصحته واضحة .

أمَّا المثال ففيه الحاصل : ٩ × ٣

والخارج : $\frac{٩}{٣}$

وبضرب الحاصل فى الخارج ، نحصل على ٩^{٢} = ٨١ .

الحادية عشرة :

التّفاضُلُ بين كُلِّ مرَبَّعَين يُسَاوِي مضروبَ جَذْرَيْهما[2] فى تفاضُلِ الجذْرَيْن

مثالها : التّفاضُلُ بيْنَ ستّة عَشَر ، وستّةٍ وثلاثين ، عشرون[1] ، وجذرا عَشَرَةٌ ، وتفَاضُلُها اثنان .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : عشرين .

(٢) فى المخطوط ١٧٧٣ : جذرهما .

وفى المخطوط ١٢٥٣ : جذريها .

شرح : تُمثّل القاعدة الحادية عشرة بالمعادلة :

$$(م^٢ - ن^٢) = (م + ن) (م - ن)$$

وكلمة التفاضل فى النّصِّ تعنى الفرق أو حاصل الطرح .

وتدل هذه القاعدة ـ وهى صحيحة تمامًا ـ على وقوف العلماء العرب عإ فك الأقواس المشتملة على المجهولات .

والمثال الذى أورده العاملى لهذه القاعدة هو :

$$م^٢ = ٣٦ = ٦^٢ \quad ، \quad ن^٢ = ١٦ = ٤^٢$$

$$\therefore (م^٢ - ن^٢) = (٦^٢ - ٤^٢)$$

فمجموع الجذرين هو (٦ + ٤) = ١٠

وتفاضل الجذرين هو (٦ - ٤) = ٢

وحاصل ضرب الجذرين (أى مجموع الجذرين) فى تفاضُلها (أى الفرق هو ١٠ × ٢ = ٢٠ وهو نفسه الفرق بين المربعين .

الثانية عشرة :

كلُّ عَدَدَيْن قُسِمَ كلٌّ منهما على الآخرِ ، وضُرِبَ أحدُ الخارجين فى الآخر ، فالحاصلُ واحدٌ أبدًا .

مثالها : الخارجُ من قسمةِ الاثنى عشر على الثمانيةِ ، واحدٌ ونِصْفٌ ، وبالعكْسِ ثُلُثان ، ومُسَطَّحُهُمَا واحدٌ .

شرح : فى هذه القاعدة الأخيرة يقول العاملى بأن أى كسر يُضرب فى مقلوبه فالنتيجة أبدًا هى الواحد الصحيح .

فبفرض العددين م ، ن ، وبقسمة كل منهما على الآخر نحصل على خارج القسمة $\frac{م}{ن}$ ، $\frac{ن}{م}$ وبضرب أحد هذين الخارجين فى الآخر

نحصل على $\frac{م}{ن} \times \frac{ن}{م} = ١$ دائمًا وهو أمر واضح كل الوضوح

والمثال المبين فى النصّ هو : $(\frac{١٢}{٨} \times \frac{٨}{١٢})$ أى $١\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} = ١$

فحاصل الضرب (أو مُسطّح الخارجين كما جاء بالنص) يساوى الواحد الصحيح .

الباب العاشر

فى مسَائل متفرِّقة بطرقٍ مختلِفة

تشحَذُ ذهنَ الطالبِ وتمرِّنه فى استخراج المطالب .

[١] مسألة

عددٌ ضوعف وزيد عليه واحدٌ ، وضُرب الحاصلُ فى ثلاثةٍ ، وزيدَ عليه اثنان ، وضُرب المبلغُ فى أربعةٍ ، وزيدَ عليه ثلاثة[١] ، بَلَغ خمسةً وتسعين .

فبالجبْرِ عملنا[٢] ما يجب ، فانتهى إلى أربعةٍ وعشرين شيئًا ، وثلاثةً وعشرين عددًا ، تعدل خمسةً وتسعين ، وبعد إسقاطِ المشترك ، فالأشياءُ تعدلُ اثنين وسبعين ، وهى الأولى من المفردات ، وخارجُ القسمةِ ثلاثةٌ ، وهو المطلوب .

وبالخطأَيْن فرضناه اثنين ، فأخطَأنا به[٣] بأربعةٍ وعشرين ناقصةً ، ثمَّ خمسةً ، فبثمانية وأربعين زايدةً ، فالمحفوظُ الأول ستّة وتسعون ، والثانى مائة وعشرون ، قسمناهما على مجموع الخطأين ، خرج ثلاثةٌ ، وبالتحليل نقصْنا من الخمسةِ والتسعين ثلاثةً ، وسُقْنا العملَ إلى أن قَسمْنا أحدًا وعشرين على ثلاثةٍ ، ونقصْنا من السَّبعةِ واحدًا ، ونصَّفْنا الباقى .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : بثلثة

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : علمنا .

(٣) زائدة فى المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : فى هذه المسألة نفرض العدد المجهول س ، فنحصل ــ طبقًا لما ورد بالنص ــ على المعادلة :

[(٢س + ١) × ٣ + ٢] × ٤ + ٣ = ٩٥

فبالجبر تختصر المعادلة إلى :

$$٢٤ \text{ س} + ٢٣ = ٩٥$$

وبإسقاط المشترك :

$$٢٤ \text{ س} = ٧٢ \text{ ، س} = ٣$$

وهذه المسألة من النوع الأول من المسائل المفردات التي سبق شرحها في الفصل الثاني من الباب الثامن .

أما حل المسألة بطريق الخطأين فيجرى على الوجه التالى :

فبالمفروض الأول $ف_١ = ٢$ ، يكون الخطأ الأول $خ_١ = - ٢٤$

وبالمفروض الثانى $ف_٢ = ٥$ ، يكون الخطأ الثانى $خ_٢ = + ٤٨$

∴ المحفوظ الأول $= ف_١ . خ_٢ = ٩٦$

، المحفوظ الثانى $= ف_٢ . خ_١ = - ١٢٠$

ويكون العدد المطلوب $= \frac{٩٦ + ١٢٠}{٤٨ + ٢٤} = \frac{٢١٦}{٧٢} = ٣$

أمّا الطريقة الثالثة وهى طريقة التحليل أو العمل بالعكس فهى واضحة لانحتاج إلى شرح .

[٢] مسألة

إن قيل اقسم العشرةَ بقسمَيْن ، يكونُ الفضْلُ بينهما خمسةً ، فبالجبر تفرض الأقلّ شيئًا ، فالأكثر شىءٌ وخمسةٌ ، ومجموعهما شيئان وخمسةٌ تعدل عشرةً ، فالشَّىءُ بعد المقابلةِ اثنان ونصف .

وبالـخطأَين فرضنا الأقل ثلاثةً ، فالـخطأُ الأوّل واحدٌ ناقص ، ثمّ أْربعةً ، فالـخطأُ الثانى ثلاثةٌ ناقصةٌ ، والفَضْلُ بين المحفوظين خمسةٌ ، وبين الـخطأَيْن اثنان ، وبالتحليل لما كان الفضْلُ بين قِسْمى كلّ عددٍ ضِعْفَ الفضْل بين نِصْفِه وبين كُلٍّ منهما ، فإذا أزدْت نِصْفَ هذا الفضْلِ على النّصْفِ يبلغ[1] سبعةً ونصفًا ، أو نقصته منه يبقى اثنان ونصف .

---

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : بلغ .

شرح : فى هذه المسألة ـ وهى أيضًا من النوع الأول من المسائل المفردات ـ يُفرض العدد الأصغر س ، فيكون العدد الأكبر (س ا ٥) .

ولما كان مجموع العددين عشرة ، حصلنا على المعادلة :

س ا (س ا ٥) ١٠

أى ٢ س ا ٥ ١٠ (شيئان وخمسة تعدل عشرة)

وبالمقابلة ٢س ٥ وبالتالى س = ٢ $\frac{١}{٢}$

وبحساب الخطأين يكون الحل كما يلى :

نفرض العدد الأصغر $ف_{١}$ ٣ ∴ الخطأ الأول $خ_{١}$ = -- ١

ثم نفرض العدد الأصغر $ف_{٢}$ ٤ فيكون الخطأ الثانى $خ_{٢}$ = -- ٣

∴ المحفوظ الأول $ف_{١}$. $خ_{٢}$ ٣ × (-- ٣) - ٩

، المحفوظ الثانى $ف_{٢}$. $خ_{١}$ ٤ × (- ١) - -- ٤

بذلك نحصل على العدد الأصغر $\frac{٩ \quad ٤}{٣ \quad ١}$ $\frac{٥}{٢}$ = ٢ $\frac{١}{٢}$

ويكون العدد الأكبر ٥ ا ٢ $\frac{١}{٢}$ ٧ $\frac{١}{٢}$

[٣] مسألة

مالٌ زدنا عليه خُمْسَهُ وخمسةَ دراهم ، ونقصْنا من المبلغ ثُلُثَهُ وخمسةَ دراهم ، لم يبْقَ شيءٌ .

فبالجبر افرض المال شيئًا . [وزد عليه خُمْسَه وخمسةَ دراهم ، يصيرُ شيئًا وخُمْسَ شيءٍ وخمسة دراهم[1] ثم] انقص من شيءٍ وخُمْسِ شيءٍ وخمسةِ دراهم[2] ثُلثَها ، يبقى أربعةُ أخماسِ شيءٍ ، وثلاثةُ دراهم وثُلُثٌ ، وإذا نقصت منه خمسةً لم يبق شيءٌ ، فهو مُعادِلُ الخمْسةِ ، وبعد إسقاطِ المشترَكِ أربعةُ أخماسٍ (شيءٍ يعدل درهمًا وثُلْثَين ، فاقْسِم واحدًا وثُلْثين على أربعةِ أخماسٍ)[3] ، يخرُجُ اثنان ونصفُ سُدْسٍ ، وهو المطلوب .

وبالخطأَيْن فرضناه خمسةً ، فالخطأُ الأوّلُ اثنان وثُلُثٌ زَائدٌ ، أو اثنين ، فالخطأ الثانى ثُلثُ خُمْسٍ ناقص ، فالمحفوظُ الأوّلُ ثُلثٌ ، والثانى أربعةٌ وثلثان ، والخارجُ من قسمةِ مجموعِها على مجموع الخطأين ـ أعنى اثنَيْن وثلثًا وثُلثَ خُمْسٍ ، أى اثنان وخُمْسان ـ اثنان ونصْفُ (و)[4] سُدْسٍ ، وبالتحليل خذ الخمسةَ التى لا يبقى بعد إلقائها شيءٌ[5] ، وزد عليها نِصْفَها لأنَّه الثُّلث المنقوصُ ، ثمَّ انقص من المجتمع الخمسةَ ، ومن الباقى سُدْسه[6] إذ هو خُمْس مَزِيد .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

(٢) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٣) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٤) زائدة فى المخطوط ١٧٧٣ وهو تحريف .

(٥) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .

(٦) فى المخطوط ٧٥٣ : سدس .

شرح : بفرض المال س يكون المقابل التحليلى للمسألة هو :

$$[س + \frac{١}{٥} س + ٥] \times \frac{٢}{٣} - ٥ = صفرًا .$$

$$\frac{٤}{٥} س + ٣\frac{١}{٣} = ٥$$

=

= وبالمقابلة ـ أى بإسقاط المشترك من طرفى المعادلة ـ نحصل على :

$$\frac{٤}{٥}\text{س} = ١\frac{٢}{٣} \text{ ، } \text{س} = \frac{١\frac{٢}{٣}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٢٥}{١٢} = ٢\frac{١}{١٢}$$

والحل بطريق «حساب الخطأين» كما يلى :

بالمفروض الأول $\text{ف}_{١} = ٥$ يكون الخطأ الأول $\text{خ}_{١} = + ٢\frac{١}{٣}$

وبالمفروض الثانى $\text{ف}_{٢} = ٢$ يصبح الخطأ الثانى $\text{خ}_{٢} = -\frac{١}{١٥}$ (أى ثلث خمس ناقص)

فالمحفوظ الأول $\text{ف}_{١} . \text{خ}_{٢} = ٥ \times (-\frac{١}{١٥}) = -\frac{١}{٣}$

والمحفوظ الثانى $\text{ف}_{٢} . \text{خ}_{١} = ٢ \times ٢\frac{١}{٣} = ٤\frac{٢}{٣}$

فيكون المال = $\frac{\frac{١}{٣} + ٤\frac{٢}{٣}}{\frac{١}{١٥} + ٢\frac{١}{٣}} = \frac{٥}{٢\frac{٢}{٥}} = \frac{٢٥}{١٢} = ٢\frac{١}{١٢}$

أما طريق التحليل فهو فى غير حاجة إلى توضيح .

[٤] مسألة

حوضٌ أرسل فيه أربعةُ أنابيب ، يَملأُه[١] أحدُها فى يومٍ ، والباقى[٢] بزيادة يوم ، ففى كم يمتلئ .

فبالأربعة المتناسبة لاريبَ أنّ الأربع تملأُ فى يومٍ مِثْلَى الحوضِ ونِصْفَ سُدْسِهِ[٣] ، فالنّسبةُ بينهما كنسبة الزمان المطلوب إلى الحوض ، فالمجهولُ أحدُ الوسَطَين ، فانسب واحدًا إلى اثنين ونصف سُدْسٍ ، بخُمْسَيْن وخُمْسَىْ خُمْسٍ ، إذِ المنسوبُ إليه خمسةٌ وعشرون (و)[٤] نصف سدس ، والمنسوب اثنا عشر نصف سدس .

وبوجه آخر الأربعةُ[٥] تملأُ فى يومٍ حَوْضًا هو خمسةٌ وعشرون جزءًا ممّا به الأوّل اثنا عشر جزءًا[٦] ، وامتلاءُ كُلِّ جُزءٍ فى جزءٍ من اليوم ، فيمتلئُ الأوّل فى اثنى عشر جزءًا من خمسةٍ وعشرين جزءًا من يوم .

فإن قيل وأطلق أيضًا فى أسفله بالوعة تُفرغه فى ثمانية أيام ، فلا ريْبَ أنَّ (الأنبوبةَ الرابعة[٧]) تملأ حينئذ فى يومٍ ثُمْنَ حوضٍ ، فالأربعُ تملأُ فيه مثل ذلك الحوض ، وثلاثةً وعشرين جزءًا من أربعةٍ وعشرين جزءًا منه ، فنسبةُ يومٍ واحدٍ إلى ذلك كنسبةِ الزّمانِ المطلوبِ إلى الحوضِ ، فانْسِب مُسطَّحَ الطرفَيْن إلى الوسطِ بأربعةٍ وعشرين جزءًا من سبعةٍ وأربعين جزءًا[٧] من يومٍ ، وعلى الوجه الآخر الأربع تملأُ فى يومٍ حوضًا هو سبْعةٌ وأربعون جزءًا ممّا به ، الأوّل أربعة وعشرون ، والباقى ظاهر .

---

(١) الهاء ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٢) فى المخطوط ٧٥٣ : البواقى .

(٣) فى المخطوط ٧٥٣ : سدس .

(٤) زائدة فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٥) فى المخطوط ٧٥٣ : الأربع .

(٦) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

(٧) فى المخطوط ١٧٧٣ : البالوعة الواقعة ، وفى المخطوط ١٢٥٣ : البالوعة .

(٨) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

شرح : فى المسألة الرابعة تكون كمية المياه التى تتدفق من كل انبوب فى اليوم الواحد كما يلى :

الأنبوب الأول	= 1	حوضًا
الأنبوب الثانى	= $\frac{1}{2}$	حوض
الأنبوب الثالث	= $\frac{1}{3}$	حوض
الأنبوب الرابع	= $\frac{1}{4}$	حوض

فتكون الكمية الكلية المتدفقة من الأنابيب الأربع فى اليوم الواحد = $\frac{1}{12}$ ٢ حوضًا

فبطريق الأربعة المتناسبة :

$$\frac{\text{١ يوم}}{\frac{25}{12}\ \text{حوضًا}} = \frac{\text{الزمان المطلوب}}{\text{١ حوض}}$$

فيكون الزمان المطلوب لملء الحوض بإرسال الأنابيب الأربعة فيه فى وقت واحد

$$= \frac{1}{\frac{25}{12}} = \frac{12}{25} = \frac{10}{25} + \frac{2}{25} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5}\ \text{يوم}$$

(أى خُمْسين وخمسى خُمْس كما جاء بالنصّ) .

الجزء الثانى من المسألة يُدخل فى الاعتبار وجود بالوعة تفرغ كل ما فى الحوض فى ٨ أيام ، وبالتالى يكون تصرُّف البالوعة = $\frac{١}{٨}$ حوض يوميًّا . ومعنى ذلك أن الأنبوبة الرابعة بينما تملأ فى اليوم الواحد $\frac{١}{٤}$ الحوض ، فإنه نتيجة تصريف البالوعة ، يكون صافى ملء الأنبوبة الرابعة فى اليوم هو $\frac{١}{٨}$ حوض فقط .

وإذا أضيف تأثير عمل الأنابيب الثلاثة الأخرى تكون كمية التدفق من الأنابيب الأربع – مع وجود البالوعة – هى :

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٨}) = ١ \frac{٢٣}{٢٤} = \frac{٤٧}{٢٤} \text{ حوضًا}$$

وبالأربعة المتناسبة :

$$\frac{\text{١ يوم}}{\frac{٤٧}{٢٤}\text{ حوضا}} = \frac{\text{الزمان المطلوب}}{\text{١ حوض}}$$

∴ الزمان المطلوب لملء الحوض – مع تفريغ البالوعة – هو $\frac{٢٤}{٤٧}$ من اليوم .
كذلك فإنَّ الأنابيب الأربع تملأ فى اليوم الواحد – مع وجود البالوعة التى تفرغه بمعدل $\frac{١}{٨}$ حوض فى اليوم – حوضًا سعته $\frac{٤٧}{٢٤}$ من سعة الحوض موضوع المسألة .

[٥] مسألة

سمكةٌ ثلثها فى الطِّين ، ورُبْعُها فى الماء ، والخارجُ[1] منها ثلاثةُ أشبارٍ . كم أشبارُها .

فبالأربعةِ المتناسبةِ أسقط الكسْرَين من مخرجهما . يبْقىَ خمسةٌ ، فنسبةُ الاثنى عشر إليها كنسبة المجهول إلى الثلاثةِ ، والخارجُ من قسمةِ مُسَطَّحِ الطّرفين على الوسطِ المعلُومِ[2] سبعةٌ وخُمْسٌ ، وهو المطلوب .

وبالجبر ظاهرٌ لأنَّك تُعَادِلُ شيئًا أُلْقِىَ منه[3] ثُلْثُه ورُبْعُهُ ـ أعنى رُبْعَ شىءٍ وسدسيه[4] ـ بثلاثة ، ثمّ تقسمها على الكسر ، يخرج ما مرَّ .

وبالخطأيْن أظهر لأنَّك تفرضها[5] اثنى عشر ، ثمَّ أربعةً وعشرين ، فيكونُ الفضْلُ بين المحفوظَيْن ستةً وثلاثين ، وبين الخطأين خمسة ، وبالتحليل تزيدُ على الثلاثةِ مثلَها وخُمسَيْها ، لأنَّ الثُلْثَ والرُّبْعَ من كلِّ عددٍ يساوى ما بقِى وخُمْسَيْه ، وقس على ذلك أمثاله .

تنظُرُ النّسبةَ بين الكسور المُلْقَاة ، وبين ما بقِى من المخرجِ المشتَرَكِ ، وتزيد على العدد الذى أعطاه السائلُ بمقتضى تلك النسبة ، وهذا العمل الأخير من خواصِّ هذه الرسالة .

(١) فى المخطوط ١٢٥٣ : الباقى .
(٢) فى المخطوط ٧٥٣ : المعلومة .
(٣) ناقصة فى المخطوط ٧٥٣ .
(٤) وردت فى المخطوطات سدسه ، وصححتها سدسيه طبقًا للمعطيات وتفصيلات الحل .
(٥) فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٢٥٣ : تفرضها .

شرح : فى المسألة الخامسة يقدم العاملى ثلاث طرق للحل :

بالأربعة المتناسبة : يكون المخرج المشترك للكسرين (الثلث والربع) هو ١٢ . =

= وباسقاط الكسرين من مخرجهما يبقى خمسة ، أى أنه إذا اعتبر طول السمكة ١٢ يكون مجموع ثلثها وربعها سبعة . فيكون الجزء الخارج من السمكة ٥ ، ولكن القيمة الحقيقية لهذا الجزء هو ثلاثة أشبار .

$$\therefore \frac{\text{طول السمكة}}{١٢} = \frac{٣}{٥}$$

$$\therefore \text{طول السمكة} = \frac{١٢ \times ٣}{٥} = \frac{٣٦}{٥} = ٧ \frac{١}{٥} \text{ شبراً}$$

أمّا بطريق الجبر فيفرض طول السمكة س

$$\therefore \text{س} - \frac{١}{٣}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س} = ٣$$

$$\frac{٥}{١٢}\text{س} = ٣$$

$$\therefore \text{س} = \frac{١٢ \times ٣}{٥} = ٧ \frac{١}{٥} \text{ شبراً}$$

وبطريق الخطأين نفرض طول السمكة مرة ١٢ شبرًا ، ومرة ثانية ٢٤ شبرًا . فينشأ عن الفرض الأول خطأ قدره + ٢ . وعن الفرض الثانى + ٧ .

ويكون المحفوظ الأول = المفروض الأول × الخطأ الثانى = ١٢ × ٧ = ٨٤

والمحفوظ الثانى = المفروض الثانى × الخطأ الأول = ٢٤ × ٢ = ٤٨

وبذلك يكون طول السمكة = $\frac{\text{الفرق بين المحفوطين}}{\text{الفرق بين الخطأين}}$ (حيث إن الخطأين بنفس الإشارة) = $\frac{٣٦}{٥} = ٧ \frac{١}{٥}$ شبراً

[٦] مسألة

رجلان حَضَرا بيْعَ دابّةٍ ، فقال أحدهما للآخر إن أعطيتنى ثُلْثَ ما معك على ما معى ، تمّ لى ثمنُها ، وقال الآخر إن أعطيتنى رُبْعَ مامعك على مامعى ، تمّ لى ثمنُها ، فكم مع كلٍّ منهما ، وكم الثّمن .

فبالجبر تفرض ما مع الأوّل شيئًا ، وما مع الثانى ثلاثةً لأجل الثُّلْثِ ، فإن أخذ الأوّل منها درهمًا كان معه شیءٌ ودرهم ، وهو الثمن ، وإن أخذ الثانى ما قاله كان معه ثلاثة دراهمَ ورُبْعُ شىءٍ ، تعْدِلُ شيئًا ودرهمًا ، وبعد المقابلة درهمان يعدلان ثلاثة أرباع شىءٍ ، فالشّیء درهمان وثلثان ، ومع الثانى الثلاثة المذكورة ، فالثّمن ثلاثة دراهم وثلثا درهم ، فإذا صحّحت الكسور كان مع الأوّل ثمانية ، ومع الثانى تسعة ، والثّمَنُ أحد عشر درهمًا .

وهذه المسألة سيّالة ، ولاستخراجها وأمثالها طريق سهل ليس من الطُّرق المشهورة ، وهو أن تنقص من مُسطَّح مَخرَجى الكسرَيْن واحدًا أبدًا يبقى ثمن الدّابة ، ثمّ أحد الكسرين يبقى ما مع أحدهما ، ثم الآخر يبقى ما مع الآخر ، ففى المثال تنقص من اثنى عشر واحدًا ، ثمّ أربعةً ، ثمّ ثلاثة ، ليبقى كلٌّ[١] من المجهولات الثلاث[٢] .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .

(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : الثلاثة .

شرح : هذا النوع من المسائل أطلق عليه العرب اسم المسائل السيّالة ، أى المسائل التى ليست لها إجابة وحيدة ، بل تصح لها عدة أجوبة ، ولبيان ما نقصد سنرمز لما مع =

= الرجل الأول بالحرف س ، ولما مع الرجل الثانى بالحرف ص .

$$\therefore \text{س} + \frac{١}{٣}\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س} + \text{ص}$$

$$\text{وبالجبر } \frac{٣}{٤}\text{س} = \frac{٢}{٣}\text{ص}$$

$$\text{وبتصحيح الكسور } ٩\text{ س} = ٨\text{ ص}$$

$$\text{أى أن } \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٨}{٩}$$

واضح من هذه النتيجة أن الإجابة على المسألة تحدد فقط النسبة بين ما مع الأول إلى ما مع الثانى على أنها ٨ : ٩ ، وبالتالى يمكن أن يكون مع الأول ثمانية دراهم ، فيلزم أن يكون مع الثانى تسعة دراهم ، ولكن من الممكن أيضًا أن يكون مع الأول أى مبلغ طالما أنه سيكون مع الثانى $\frac{٩}{٨}$ هذا المبلغ ، وبذلك يكون لمثل هذه المسألة عدد لا نهائى من الحلول ، ومن ثمَّ جاءت تسميتها بالسيّالة .

ولقد فرض العاملى ـ فى حَلِّهِ ـ أنَّ ما مع الأول س ، وما مع الثانى ثلاثة دراهم (لتقبل القسمة على ثلاثة) ، فحصل على المعادلة :

$$\text{س} + ١ = ٣ + \frac{١}{٤}\text{س}$$

وبالمقابلة : $\frac{٣}{٤}\text{س} = ٢$ $\quad\therefore \text{س} = \frac{٨}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}$ درهمًا

ويكون الثمن $٣\frac{٢}{٣}$ درهمًا

وبتصحيح الكسور يكون مع الأول ٨ ، ومع الثانى ٩ ، ويكون الثمن ١١ درهمًا . ومن الواضح أن هذا الحل ما هو إلا حل واحد فقط من العدد غير المحدود من الحلول الممكنة .

[٧] مسألة

ثلاثة أقداحٍ مملوّةٌ ، أحدها بأربعة أَرْطالٍ عَسَلاً ، والآخر بخمسةٍ خلاًّ ، والآخر بتسعةٍ ماءً ، صُبَّت فى إناءٍ واحدٍ . ومُزجت سكنجبينًا ، ثُمَّ مُلِئت الأقداحُ منه ، فكم فى كلٍّ من كلٍّ .

فاجمع الأوزان . واحفظ المجتمِعَ ، واضرب ما فى كلٍّ قدحٍ من الأوزان الثلاثة فى كلٍّ واحدٍ منها ، واقسم الحاصلَ على المحفوظِ . فالخارجُ ما فيه من النوع المضروب فيه ، فتضرب الأربعة فى نفسها ، وتقسم كما مرّ . ففى الرّباعى ثمانية أتسَاع رطلٍ عَسَلاً ، ثمّ فى الخمسة كذلك . ففيه رطلٌ وتُسْعُ خلاًّ ، ثُمَّ فى التِّسعة كذلك ففيه رطلان ماءً ، والكلُّ أربعةٌ . ثم تضرب الخمسةَ فى نفسها ، والأربعةَ والتسعةَ ، وتفعل ما مرّ ، يكن فى الخماسىّ رِطلٌ وثلاثةُ أتسَاعٍ ونصفُ تُسْعٍ خلاًّ ، ورِطْلٌ وتُسْعُ عَسَلاً ورطلان ونصفُ ماءً ، والكلُّ خمسةٌ ، ثمَّ تفعلُ ذلك بالتِّسعة ، يكن فى التّساعى رطلان عَسَلاً ، ورطلان ونصف خلاًّ ، وأربعةُ أرطالٍ ونصف ماءً ، والكلّ تسعةٌ .

شرح : فى هذه المسألة نجد أن مجموع أوزان العسل والخل والماء هو ١٨ رطلاً . وعند صبِّها فى إناء واحد يتم مزجها وتصبح متجانسة بحيث إنه عند إعادة تفريغها فى الأقداح بنفس الأوزان الأصلية . يكون وزن كل من السوائل الثلاث فى أى من الأقداح بنسبة ٤ : ٥ : ٩ . ويكون الوزن الفعلى لأى من هذه السوائل بحسب سعة القدح بالنسبة لمجموع الأوزان . وتفصيل ذلك على النحو التالى :

نصيب القدح الأول من العسل $= \frac{٤}{١٨} \times ٤ = \frac{٨}{٩}$ رطلاً

نصيب القدح الأول من الخل $= \frac{٤}{١٨} \times ٥ = ١ \frac{١}{٩}$ رطلاً ٤ أرطال

نصيب القدح الأول من الماء $= \frac{٤}{١٨} \times ٩ = ٢$ رطلاً :

[٨] مسألة

قيل لشخْصٍ كم مضى من اللّيل ، فقال ثُلث ما مضى يساوى رُبْعَ ما بقى ، فكم مضى وكم بقى .

فبالجبر افرض الماضى شيئًا ، فالباقى اثنا عشر إلاّ شيئًا ، فثُلثُ الماضى يعدِلُ ثلاثةً إلاّ رُبْعَ شيءٍ ، وبعد الجبر ثلثُ الماضى ورُبْعُه يعدل ثلاثةً ، فالخارجُ من القسمةِ خمسةٌ وسُبْعٌ ، وهو السّاعات الماضية ، والباقية ستٌّ وستّةُ أسباعِ ساعةٍ .

وبالأربعة المتناسبة اجعل الماضى شيئًا ، والباقى أربعَ ساعاتٍ لأجل الرُّبْعِ ، فثلث الشيء يساوى ساعةً ، فالشيء الماضى[1] ثلاثُ ساعات ، والكلُّ سَبْعَةٌ ، فنسبةُ الثلاثة إلى السَّبعة كنسبة المجهول إلى اثنى عشر ، فاقسم مُسطَّحَ الطّرفين على الوسطِ ، يخرُجُ خمسةٌ وسُبْعٌ .

= وبالمثل نصيب القدح الثانى من العسل = $\frac{٥}{١٨} \times ٤ = ١ \frac{١}{٩}$ رطلاً

نصيب القدح الثانى من الخل = $\frac{٥}{١٨} \times ٥ = ١ \frac{٧}{١٨}$ رطلاً ٥ أرطال

نصيب القدح الثانى من الماء = $\frac{٥}{١٨} \times ٩ = ٢ \frac{١}{٢}$ رطلاً

كذلك نصيب القدح الثالث من العسل = $\frac{٩}{١٨} \times ٤ = ٢$ رطلاً

نصيب القدح الثالث من الخل = $\frac{٩}{١٨} \times ٥ = ٢ \frac{١}{٢}$ رطلاً ٩ أرطال

نصيب القدح الثالث من الماء = $\frac{٩}{١٨} \times ٩ = ٤ \frac{١}{٢}$ رطلاً

ومن الواضح أنَّ أوزان المزيج فى الأقداح الثلاثة هى ٤ ، ٥ ، ٩ رطلاً على التوالى .

(١) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

شرح المسألة الثامنة : بفرض ما مضى من الليل س ، يكون الباقى (١٢ ـ س) ساعةً . وحسب النص يكون :

$\frac{١}{٣}$ س = $\frac{١}{٤}$ (١٢ ـ س) (ثلث الماضى يعدل ثلاثة إلا ربع شيء)

[٩] مسألة

رُمْحٌ مركوزٌ فى حوضٍ ، والخارجُ عن الماء منه خمسةُ أذرعٍ ، فمالَ مع ثباتِ طرفِه حتّى لاقىَ رأسُه سطحَ الماءِ ، فكان البُعْد بين مطلعه من الماء ، وموضِع مُلاقاتِ رأسِهِ له[1] عشرة أذرعٍ ، كم طول الرُّمح .

فبالجبر تفرض الغائِب فى الماء شيئًا ، فالرُّمح خمسةٌ وشىءٌ ، ولا ريب أنّ بُعْدَ المَيْل وَتَرُ زاوية[2] قائـمةٍ أَحَدُ ضِلعَيْها العشرة الأذرع ، والآخر قدر الغائِب منه ، أعنى الشىءَ ، فمربَّع الرُّمح ـ أعنى خمسةً وعشرين ومالاً وعشرةَ أشياء ـ مساوٍ

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

(٢) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٧٧٣ .

∴ وبالجبر : $(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٤})$ س = ٣ (ثلث الماضى وربعه يعدل ثلاثة)

∴ $\frac{٧}{١٢}$ س = ٣ ، س = $\frac{٣٦}{٧} = ٥ \frac{١}{٧}$ ساعة

∴ ما مضى من الليل = $٥ \frac{١}{٧}$ ساعة

وما بقى منه = $٦ \frac{٦}{٧}$ ساعة

هذا وقد أورد العاملى حلاً للمسألة ـ بطريق الأربعة المتناسبة ـ بأن فرض ما مضى من الليل س ، وما بقى أربع ساعات (لتقبل القسمة على أربعة)

فحسب هذا الفرض يكون $\frac{١}{٣}$ س = ساعة واحدة

ويكون ما مضى من الليل ٣ ساعات

بهذا الأسلوب أوجد العاملى النسبة بين ما مضى من الليل إلى ما بقى منه على أنها ٣ : ٤ ، فيكون مجموع ساعات الليل ـ حسب هذا الافتراض ـ سبع ساعات ، ولما كان مجموع الساعات فى الواقع هو اثنى عشر ، فبالتناسب نحصل على :

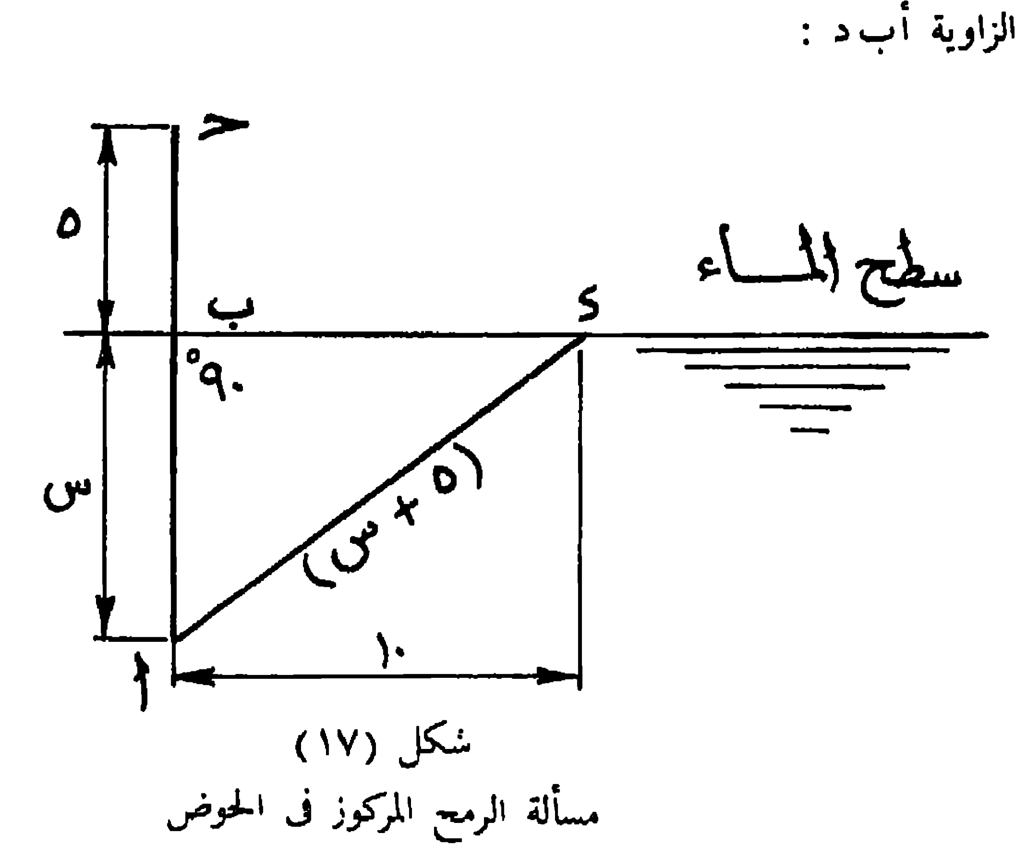
$\frac{\text{مامضى من الليل}}{\text{طول الليل}} = \frac{٣}{٧} = \frac{\text{س}}{١٢}$ (نسبة الثلاثة إلى السبعة كنسبة المجهول إلى اثنى عشر)

∴ ٧ س = ٣ × ١٢ ، س = $\frac{٣٦}{٧} = ٥ \frac{١}{٧}$ ساعة كما تقدم .

لمربَّعى العَشرة والشّىء ، أعنى مائةً ومالاً يشكل العرُوسَ ، وبعد إسقاط المشتركِ يبقى عشرةُ أشياءِ مُعادِلةً لخمسةٍ وسبعين ، والخارجُ من القسمةِ سَبْعةٌ ونصفٌ ، وهو القدْرُ الغايبُ فى الماءِ ، فالرُّمحُ اثنا عشر ذراعًا ونصفٌ.

ولاستخراج هذه المسألة ونظائرها طرقٌ أخرى ، تُطلبُ مع براهينها من كتابنا الكبير وفَّقنا الله تعالى لإتمامه.

شرح المسألة التاسعة : نفرض القدر الغائب فى الماء والرمح مركوز فى الحوض شيئًا أى س
فيكون طول الرمح = (٥ + س) ذراعاً
ويتضح من شكل (١٧) أنه بالنسبة للمثلث القائم الزاوية أ ب د :



شكل (١٧)
مسألة الرمح المركوز فى الحوض

(٥ + س)^{٢} = ١٠^{٢} + س^{٢}

٢٥ + س^{٢} + ١٠ س = ١٠٠ + س^{٢} (خمسة وعشرون ومال وعشرة أشياء تعدل مائة ومالاً)

وبإسقاط المشترك : ١٠ س = ٧٥

∴ س = ٧.٥ ذراعاً القدر الغائب فى الماء

ويكون طول الرمح = ٧,٥ + ٥ = ١٢,٥ ذراعاً

خاتمة

قد وقعَ للحكماءِ الرَّاسخين فى هذا الفنِ مسائلُ صرفوا فى حلِّها أفكارَهم ، ووجَّهوا إلى استخراجها أنظارهم ، وتوصَّلوا إلى كشفِ نِقابها بكلِّ حيلةٍ ، وتوسَّلوا إلى رفعِ حجابها بكلِّ وسيلةٍ ، فما استطاعوا إليها سبيلاً ، وما وجدوا عليها مُرشِدًا ودليلاً ، فهى باقيةٌ على عدمِ الانحلالِ من قديم الزمان ، مستصعبةٌ على سائر الأذهان ، إلى هذا الآن .

وقد ذكَرَ علماءُ هذا الفنِّ بعضَها فى مُصَنَّفاتهم ، وأوْرَدوا شطرًا منها فى مؤلَّفاتهم ، تحقيقًا لاشتمال هذا الفن على المستصعبات الآبيات ، وإفْحَامًا لمن يدَّعى عَدَم العجْزِ فى الحسابيّات ، وتحذيرًا للمحاسبين من التزام الجواب عمّا يورد عليهم منها ، وحثًّا لأصحابِ الطّبايعِ الوقَّادة على حلِّها والكشفِ عنها .

وأنا أوْرَدتُ فى هذه الرسالةِ سَبْعَةً منها على سبيلِ الأنموذجِ ، اقتداءً بمنارهم ، واقتفاءً لآثارهم ، (وهى هذه)[1] :

الأولى :

عشرةٌ مقسومةٌ بقسمين ، إذا زيدَ علَى كُلٍّ[2] جذرُهُ ، وضُرِبَ المجتمِعُ فى المجتمعِ ، حصُل عددٌ مفروضٌ .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .　　(٢) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .

شرح : يختتم بهاء الدين العاملى كتابه بذكرِ سبعةٍ من المسائل التى لم يوجد لها حلٌّ على عصره . وذلك على سبيل المثال . نقدمها بصيغها الرمزية فيما يلى :

لنفرض ـ فى هذه المستصعبة الأولى ـ أحد قسمى العشرة : $س^٢$

فيكون القسم الآخر : $(١٠ — س^٢)$

الثانيـة :

مجذورٌ إنْ زِدْنا عليه عشرةً ، كان للمجتمِعِ [1] جَذْرٌ ، أوْ نقصْناها منه ، كان للباقِى [2] جَذْرٌ .

(١) فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٢٥٣ : المجتمع جذرًا .

(٢) فى المخطوطين ١٢٥٣ ، ١٧٧٣ : الباقى جذرًا .

= بذلك نحصل ـ طبقًا لنصِّ المسألة ـ على المعادلة :

$$(س^{٢} + س)\ [(١٠ - س^{٢}) + \sqrt{(١٠ - س^{٢})}\ ] = حـ$$ حيث حـ العدد المفروض

أى أن : $س^{٤} + س^{٣} - ١٠س^{٢} - ١٠س + حـ = (س^{٢} + س)\ \sqrt{١٠ - س^{٢}}$

ومن الواضح أن صعوبة الحل تكمن فى أن المعادلة من الدرجة الرابعة .

هذا ومن المعروف أنَّ أبا الوفاء البوزجانى (٩٤٠ — ٩٩٨م) قد حلَّ ـ بطريقة هندسية ـ المعادلة :

$$س^{٤} + ب\ س^{٣} = هـ$$

(عن كتاب البوزجانى : «استخراج ضلع المكعب بمال مال وما ترتب منهما») . كما أنه قد تمكَّن من التوصُّلِ إلى حلول أخرى تتعلق بالقطع المكافئ .

كذلك فإنَّ مؤلفات عمر الخيامى (١٠٤٨/٣٨ ـ ١١٢٣م) تشتمل على معادلة من الدرجة الرابعة هى :

$$(١٠٠ - س^{٢})(١٠ + س)^{٢} = ٨١٠٠$$

ويضيف الخيامى أن جذر هذه المعادلة ما هو إلا نقطة تقاطع الخطين البيانيين :

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$ (ويمثل دائرة نصف قطرها = ١٠)

، $(١٠ + س)\ ص = ٩٠$ (ويمثل قطعًا زائدًا)

وهو حل المعادلة الأصلية : $س^{٤} + ٢٠س^{٣} - ٢٠٠٠\ س = ١٩٠٠$

شرح المستصعبة الثانية : سنرمز للمجذور (أى الذى يمكن جذره ، بمعنى أن يكون له جذر صحيح) بالرمز $س^{٢}$ ، فنحصل ـ حسب المتن ـ على المعادلتين : =

الثالثة :

أُقِرَّ لزيدٍ بعشرةٍ إلاّ جَذْرَ ما لعمرٍو ، ولعمرٍو بخمْسَةٍ إلاَّ جَذْر ما لزيدٍ .

$$= \qquad س^{٢} + ١٠ = ن_{١}^{٢}$$

$$، س^{٢} - ١٠ = ن_{٢}^{٢}$$

حيث $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ أعداد صحيحة ، هما جذرا المُجتمِع من زيادة العشرة أو نقصانها من المجذور $س^{٢}$ على التوالى ، س عدد صحيح أيضًا .

ويجمع المعادلتين نصل إلى النتيجة الآتية :

$$٢س^{٢} = ن_{١}^{٢} + ن_{٢}^{٢}$$

أى أنه من المحال تقسيم ضعف المربع إلى مربعين ، وهو ما جاء فيما بعد فى نظرية نُسِبت للعالم الرياضى الفرنسى «فيرما» ، وسنتناول هذه النظرية بتفصيل أكثر عند الحديث عن المستصعبة الرابعة .

شرح المتصعبة الثالثة : نفرض أن ما مع عمرو $س^{٢}$
(وذلك حتى يكون جذره س)

∴ ما أُقِرَّ لزيد = (١٠ - س)

ويكون ما لعمرو = $٥ - \sqrt{١٠ - س}$

وبذلك نحصل على المعادلة :

$$ما مع عمرو = س^{٢} = ٥ - \sqrt{١٠ - س}$$

$$أى أن \sqrt{١٠ - س} = ٥ - س^{٢}$$

وبتربيع طرفى المعادلة :

$$١٠ - س = ٢٥ - ١٠ س^{٢} + س^{٤}$$

$$∴ س^{٤} - ١٠س^{٢} + س + ١٥ = صفرًا$$

فهذه المستصعبة تؤدى إلى معادلة من الدرجة الرابعة ، ومن هنا جاءت الصعوبة فى حلها .

الرابعــة :

عَدَدٌ مُكعَّبٌ قُسِمَ بقسْمَين مُكعَّبين .

شرح : هذه المستصعبة الرابعة هى فى الواقع أساسُ ما عُرِفَ فيما بعد بمسألة أو نظرية «فيرما »نِسْبَةً إلى الرياضى الفرنسى «بيير دى فيرما » (Pierre de Fermat) الذى عاش فى الفترة من سنة ١٦٠١ حتى سنة ١٦٦٥م . ولقد وقعت فى يد فيرما نسخة من طبعة جديدة لكتاب الحساب (Arithmetica) الذى ألَّفه العالم ديوفانتس السكندرى (Diophantus) الذى نبغ حوالى عام ٢٥٠م ، فعلَّق فيرما على هامش إحدى صفحات هذه النسخة ، وذلك حوالى عام ١٦٣٧م . فكتب عبارته الهامشية الشهيرة التى عرفت بنظرية فيرما :

«من المحال تقسيم المكعب إلى مكعبين . أو ضعف المُربّعٌ إلى مربعين . أو بوجه عام تقسيم أية قوة (يقصد أُسّ) أعلى من المربَّع إلى قوتين من نفس الدرجة .

ولقد اكتشفتُ برهانًا جديرًا حقًّا بالاعتبار . بَيْدَ أنَّ هذا الهامش البالغ الصغر لا يتسع لاحتوائه . »

والصورة العامة لهذه المسألة المستحيلة الحل ـ كما نُعبِّر عنها برموزنا الرياضية المعاصرة ـ هى :

تكون المعادلة : سن + صن = عن مستحيلة الحل طالما أن س ، ص ، ع أعداد صحيحة ، وأن ن عدد صحيح أكبر من العدد ٢ .

ولقد أثبت فيرما هذه النظرية لقيمة ن = ٤ ، إلاَّ أنَّ البرهان العام لعباراته الهامشية لم يتم الكشف عنه إلى يومنا هذا .

وجدير بالذكر أن هذه المسألة المستعصية قد ذاع صيتها . ورصدت جائزة ضخمة لمن يأتى بحل لها ، وقد بذل كثير من الرياضيين الغربيين جهودًا ضخمة لإيجاد برهان عام لهذه النظرية سواء بالإثبات أو بالنفى ولكن دون جدوى .

ومن الواضح أنَّ ملاحظة فيرما الخاصة باستحالة تقسيم المكعب إلى مكعبين قد

جاءت بعد انتهاء بهاء الدين العاملى من كتابة مؤلفه «خلاصة الحساب » ، بل إن هذه الملاحظة الهامشية لفيرما قد جاءت بعد وفاة العاملى بحوالى خمسة عشر عامًا ، وبالتالى =

الخامسة :

عَشرةٌ مقسُومَةٌ بقِسْمَين ، إذا قَسْمنا كُلاًّ منهما على الآخر ، وجمعْنا الخارِجَيْن ، كان المجتمعُ مُساويًا لأحدِ قِسْمى العشرةِ .

فَسَبْقُ العرب فى هذا الموضوع ثابتٌ بَيِّنٌ .

كذلك فإن ملاحظة فيرما باستحالة تقسيم ضِعْف المربَّع إلى مُرَبَّعين ، هى نفسها المستصعبة الثانية التى تقدم ذكرها فى هذه الخاتمة ، كذا فى المستصعبة السابعة . ولا جدال فى سبق العرب إلى هذه الاستحالة .

* * *

شرح المستصعبة الخامسة : نفرض أحد قسمى العشرة س

فيكون القسم الآخر من العشرة (١٠ − س)

وطبقاً لمنطوق المسألة نحصل على المعادلة :

$$\frac{\text{س}}{\text{١٠ − س}} + \frac{\text{١٠ − س}}{\text{س}} = \text{س أو (١٠ − س)}$$

$$\frac{\text{س}^{٢} + (\text{١٠ − س})^{٢}}{\text{س}\ (\text{١٠ − س})} = \text{س أو (١٠ − س)}$$

$$\therefore\ \text{س}^{٢} + (\text{١٠ − س})^{٢} = \text{س}^{٢}\ (\text{١٠ − س})$$

أى أن $\text{س}^{٣} - \text{٨س}^{٢} - \text{٢٠ س} + \text{١٠٠} = \text{صفراً}$ (١)

وإن كان التساوى مع القسم الآخر من العشرة تكون المعادلة هى :

$$\text{س}^{٢} + (\text{١٠ − س})^{٢} = \text{س}(\text{١٠ − س})^{٢}$$

أى $\text{س}^{٣} - \text{٢٢س}^{٢} + \text{١٢٠س} - \text{١٠٠} = \text{صفراً}$ (٢)

ومن الواضح أنَّ المسألة تؤول إلى معادلة من الدرجة الثالثة ـ إمَّا المعادلة (١) أو المعادلة (٢) ـ ومن هنا كان الاستصعاب فى حلها .

ولقد كانت هناك محاولات من جانب العلماء العرب لحل معادلة الدرجة الثالثة التى يعبر عنها بالمعادلة العامة :

$$\text{أس}^{٣} + \text{ب س}^{٢} + \text{جـ س} + \text{د} = \text{صفراً}$$

=

وذلك بالطرق الهندسية ـ لا الجبرية ـ بواسطة قطوع المخروط ، ومن أمثال الرياضيين العرب الذين ساهموا فى مثل هذه الحلول أبو عبد الله محمد عيسى الماهانى (توفى سنة ٨٧٤ م) ، وثابت بن قرة الحرانى (توفى عام ٩٠١ م) ، وأبو جعفر الخازن الخراسانى (توفى حوالى سنة ٩٧١ م) ، والحسن بن الهيثم (توفى عام ١٠٣٩ م) . وعمر الخيامى (توفى بين سنتى ١١٢٣ م ، ١١٣٢ م) .

فيُنسَبُ إلى أبى عبد الله محمد عيسى الماهانى معادلة الدرجة الثالثة :

$$س^{٣} + د^{٢}هـ = ب س^{٢}$$

وقد عالجها بطريق قطوع المخروط فعُرفت باسمه . وهو الذى تصدَّى لمسألة قطع الكرة بمستو يقسمها بحيث تكون النسبة بين حجمى جزأيها نسبةً معيّنةً .

كذلك سعى علماء العرب لحل المسألة التى تقول :

«كيف نجد ضلع مُسبَّعٍ منتظمٍ على أن يكون إنشاء الضلع من المعادلة :

$$س^{٣} - س^{٢} - ٢س + ١ = \text{صفراً}$$.»

وقد تمكَّن أبو الجود محمد بن الليث (المتوفى سنة ٤٠٠ هـ = ١٠٠٩ م) من التوصُّل إلى حل لها بواسطة قطوع المخروط ، وإليه يُنسب كتاب فى بيان كيفية رسم المضلعات المنتظمة : «المُسبَّع والمُتسّع» .

أمَّا غياث الدين أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيَّامى فقد تضمَّنت مؤلفاتُه حلولاً ـ بطرقٍ هندسيةٍ ـ لعدَّة صورٍ من معادلة الدرجة الثالثة نوجزها فيما يلى :

(١) المعادلة : $س^{٣} + جـ^{٢}س = جـ^{٢}د$

وجذرها ـ حسب قول الخيامى ـ ينتج من تقاطع الخطين البيانيين :

$$س^{٢} = جـ ص$$

$$ص^{٢} = س(د - س)$$.

(٢) المعادلة : $س^{٣} + ب س^{٢} = د^{٣}$

(حيث ب ، د أعداد صحيحة موجبة)

ويشير عمر الخيامى إلى أن جذر هذه المعادلة

هو قيمة الإحداثى السينى لنقطة تقاطع الخطين البيانيين :

السّادسة :

ثلاثةُ مُربَّعات مُتناسبةٌ مجموعُها مُربَّعٌ .

– $س ص = د^٢$

$ص^٢ = د (س + ب)$

(٣) المعادلة : $س^٣ + ب س^٢ + جـ^٢ س = جـ^٢ د$

(حيث ب ، د أعداد صحيحة موجبة)

وهذه أعمُّ صور معادلة الدرجة الثالثة التى تعرَّض لها الخيامى ، ويعطى جذراً لها قيمة س لنقطة تقاطع الخطين البيانيين :

$ص^٢ = (س + ب)(د - س)$

، $س (حـ \pm ص) = حـ د$

هذا هو موقف علماء العرب من معادلة الدرجة الثالثة حتى صدر القرن الثانى عشر للميلاد ، ومنه يتبين أن العرب قد نجحوا فى حل صور كثيرة لها بطرق هندسية ، قبل أن يبدأ ظهور الحلول الجبرية لها فى القرن الخامس عشر للميلاد .

* * *

شرح المستصعبة السادسة : نفرض أن المربعات الثلاث هى $س^٢$ ، $ص^٢$ ، $ع^٢$ حيث س ، ص ، ع أعداد صحيحة .

فالمستصعبة السادسة هى :

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ن^٢$ حيث ن عدد صحيح

وإذا كانت المربعات $س^٢$ ، $ص^٢$ ، $ع^٢$ متناسبة ومساوية للتناسب بين أ ، ب ، جـ ، حيث أ ، ب ، جـ أعداد صحيحة ، فإن المعادلة تتحول إلى الصورة :

$$\frac{(أ + ب + حـ)}{أ} س^٢ = ن^٢$$

ولإمكان حل هذه المعادلة (على أن يكون كلٌّ من أ ، ب ، جـ ، س ، ن عدداً صحيحاً) ، يُشترط أن يكون $\frac{أ + ب + حـ}{أ}$ مربعاً ، وفى هذه الحالة فهناك حلول خاصة لهذه المعادلة ، مثال ذلك أن تكون النسبة أ : ب : جـ مساوية لـ ١ : ٣ : ١٢ حيث إن $\frac{أ + ب + حـ}{أ} = ١٦ = ٤^٢$ =

السّـابعة :

مجذورٌ[1] إذا زيدَ عليه جَذْرُهُ[2] ودرهمان ، أو نُقِصَ منه جَذْرُهُ ودرهمان ، كان للمجتمِعِ[3] أو الباقى جَذْرٌ[4] .

---

(١) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .
(٢) فى المخطوط ١٢٥٣ : جذر .
(٣) فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٢٥٣ : المجتمعْ .
(٤) فى المخطوطين ٧٥٣ ، ١٢٥٣ : جذراً .

= أمّا إذا قُصِدَ بالمربعات المتناسبة تلك التى تُكَوِّنُ أضلاعُها مثلثاً قائم الزاوية ، فإن المستصعبة تتخذ صورة أخرى هى :

$ن^٢ = س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢س^٢$ مثلا

(إذا كانت س وتر المثلث القائم الزاوية ذى الضلعين ص ، ع)

أى أن $٢س^٢ = ن^٢$

وحيث إن العدد ٢ ليس عددًا مربعاً ، فلذلك يستحيل حل المعادلة بأعدادٍ صحيحة لكلٍّ من س ، ن .

* * *

شرح المستصعبة السابعة : نفرض المجذور (أى الذى يمكن إيجاد جذر صحيح له) $س^٢$ (حيث س عدد صحيح)

وبالتالى يمكن التعبير عن المستصعبة بالمعادلتين :

$$س^٢ + س + ٢ = ن_١^٢$$

$$، س^٢ - س - ٢ = ن_٢^٢$$

حيث $ن_١$ ، $ن_٢$ عددان صحيحان هما جذرا المجتمع فى حالتى الإضافة والنقصان على التوالى .

وبجمع المعادلتين نحصل على المستصعبة :

$$٢س^٢ = ن_١^٢ + ن_٢^٢$$

أى أنه ـ طبقاً لكلام العاملى فى هذا المخطوط ـ يستحيل تقسيم ضعف المربع إلى مربعين ، وهو نفس ما جاء بالمستصعبة الثانية ، وهو سبق على ما ورد فى الملاحظة الهامشية للعالم الرياضى الفرنسى فيرما ، كما تقدم بيانه فى المستصعبتين الثانية والرابعة .

هذا[1] واعلم أيُّها الأخُ العزيزُ الطَّالبُ لنفايسِ المطالبِ أنِّى قد أوْرَدت لك فى هذه الرسالةِ الوجيزةِ ، بل الجوهرةِ[2] العزيزةِ ، من نفايسِ عرايسِ قوانينِ الحسابِ ، مالم يجتمع إلى الآن فى رسالةٍ ولا[3] كتابٍ ، فاعرفْ قَدْرها . ولا[4] ترخص مهْرَها . وامْنَعْها عمَّن[5] ليس هو[6] أهلها ، ولا تزفَّها إلاَّ[7] إلى[8] حريصٍ ، على أنْ يكونَ بَعْلها ، ولا تبْذلها لكثيفِ الطَّبع من الطُّلاَّب ، لئلا تكون مُعَلَّقًا للدرَّةِ فى أعناقِ الكلاب ، فإنَّ كثيرًا[9] من مطالبها حَرِىٌّ بالصِّيانةِ والكتْمانِ . حقيقٌ بالاستتار عن أكثرِ أهلِ هذا[10] الزَّمانِ . فاحْفَظْ وَصيَّتى إليك . واللهُ حفيظٌ[11] عليك .

[وينتهى المخطوط ١٢٥٣ بالعبارة التالية]

« تمت الرسالة بعون الله الملك الغفران فى سنة تسعين وألف فى محرم الحرام »

[ويختتم المخطوط ١٧٧٣ الكتاب بالعبارة :]

« تمت الرسالة اللطيفة بتوفيقات الأزلية الشريفة . وصلى الله على سيدنا محمد وعلى صحبته وسلم » .

[أما المخطوط ٧٥٣ فيستطرد بالتذنيب التالى] .

---

(١) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ . ١٢٥٣ .
(٢) فى المخطوط ١٧٧٣ : الجواهر .
(٣) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .
(٤) ناقصة فى المخطوط ١٢٥٣ .
(٥) فى المخطوط ١٧٧٣ : لمن .
(٦) ناقصة فى المخطوطين ٧٥٣ . ١٢٥٣ .
(٧) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .
(٨) فى المخطوط ١٢٥٣ : على .
(٩) فى المخطوط ١٢٥٣ : أكثر .
(١٠) ناقصة فى المخطوط ١٧٧٣ .
(١١) فى المخطوط ١٧٧٣ : حافظ .

تَذْنِيبٌ*

ومن أهمّ ما يَنْبَغى أنْ يقتضى فى هذا الفَنّ ما عُرِفَ بين النّاس بقسمةِ الغُرَمَاءِ . وهى قسمةُ مالٍ غير وافٍ بحقوقٍ متفاوتةٍ على حسب التّفاوتِ . ويُسمَّى المالُ بالموجودِ . ومجموعُ الحقوقِ بالدُّيونِ .

فإن كان للموجودِ نسبةٌ من النِّسب المُنْطَقَة إلى الديونِ . فإنْ كان جزءًا مُفردًا أوْ مُضافًا ، فاقْسِم كلَّ حقٍّ على المخرَجِ ، فما خرَجَ فهو ما يستحقُّه من الموجود .

وإنْ كان جزءًا مكرَّرًا فاضْربه فى عِدَّة أمْثَالِ الجزءِ . فالحاصلُ هو المستحقُّ ، أو مَعْطوفًا . فحصّل مجموعَ المعطُوفَيْن من المشتركِ . فاضرب الخارجَ فى المجموعِ .

مثالُه : رجلٌ مديونٌ من زيدٍ بدينارَيْن . ومن عمروٍ بخمسةٍ . ومن بكرٍ بثمانيةٍ ، ومن خالدٍ بخمسة عشر . والموجودُ عشرةٌ . وهى ثُلُثُ الديونِ .

فتقسم أحَدَ حقّ كُلّ أحدٍ على الثّلاثة . فما خرجَ فهو له من العشرةِ . فلزيدٍ ثُلثا دينار . ولعمروٍ دينارٌ وثلثاه . ولبكرٍ ديناران وثلثان . ولخالدٍ خمسةُ دنانير. أو أربعة وهى ثلثا خُمسٍ من ثلثين . فتقسم كلَّ دينٍ على خمسة عشر . وتضربَ كلَّ خارجٍ فى الاثنين ، وهو عِدَّة أمْثَال الجزءِ ، فما حصُل فهو ما يستحقُّه من الأربعة ، فلزيدٍ خُمس دينارٍ وثلث خمسِه . ولعمروٍ ثلثا دينارٍ ، ولبكرٍ دينارٌ وثلثُ خُمْسِه ، ولخالدٍ ديناران ، فاندرج فيه القسمان مثالاً .

---

* هذا التذنيب لا يشتمل عليه المخطوط ١٧٧٣ ، أمّا المخطوط ١٢٥٣ فى المكتبة الأحمدية بحلب فيوردُ ـ مكانَ التذنيب ـ «قاعدة فى بيان تقسيم الغُرماء» ، نقدمها بلفظها بعد تذنيب المخطوط ٧٥٣ عاليه .

شرح : فى هذا التذنيب يبين العاملى كيفية تقسيم مال موجود على مجموعة من المستحقين ، تزيد استحقاقاتهم أو ديونهم على المالَ الموجود ، وقد بيَّن العاملى أنه فى مثل هذه الحالة فإنَّ نصيب كل مستحق يساوى دينه مضروبًا فى النسبة بين المال الموجود ومجموع الديون أو المستحقات .
=

ولو كان الموجود أحدا وعشرين دينارًا ، وهو نصفُ وخُمْسٌ من ثلاثين ، فتقسِمَ كلَّ دينٍ على العشرة ، وتضربَ الخارجَ فى السَّبْعةِ ، إذ هى مجموعُ الكسْرَيْنِ من العشرةِ ، فما حصُل فهو المطلوبُ .

فلزيدٍ دينارٌ وخُمْسَان ، ولعمرٍو ثلاثةُ دنانير ونصفٌ ، ولبكرٍ خمسةُ دنانير وثلاثةُ أخماسِ دينارٍ ، ولخالدٍ عشرةُ دنانير ونِصْفٌ .

وإن لم يكن بينهما[1] نسبةٌ ، كذلك فإنْ توافقا فاضرب وفْقَ الموجودِ فى كلِّ دَيْنٍ ، واقسم الحاصِلَ على وِفْق الدُّيون ، فما خَرَجَ فهو المطلوب

مثاله : مَالٌ بين الجماعةِ المذكورة ، لزيدٍ تسعون دينارًا ، ولعمرٍو مائة ، ولبكرٍ مائةٌ وخمسون ، ولخالدٍ مائةٌ وستُّون ، فالمجموعُ خَمْسُمَائة ، وقد سُرِقَ منه مائتان وعشرون دينارًا ، فالموجود مائتان وثمانون ، وبين الديون والموجودِ

---

(١) أى بين الموجود ومجموع الديون .

فى المثال الأول مجموع الديون = ٣٠

بينما المال الموجود = ١٠

وبالتالى يأخذ كل من الدائنين $\frac{١٠}{٣٠} = \frac{١}{٣}$ دينه

فيكون المال الموجود قد قُسِّم على الدائنين بنفس النسبة بين ديونهم ، فيستحق لزيد $\frac{٢}{٣}$ دينار ، ولعمرو $\frac{٥}{٣} = ١ \frac{٢}{٣}$ دينار ، ولبكر $\frac{٨}{٣} = ٢ \frac{٢}{٣}$ دينار ، ولخالد $\frac{١٥}{٣} =$ ٥ دنانير .

أما إن كان المال الموجود ٤ دنانير ، فإن كل واحد من الدائنين يستحق من دينه على النسبة $\frac{٤}{٣٠}$ أى $\frac{٢}{١٥}$ (ثلثا خُمسْ)

فتكون الاستحقاقات على التوالى : $\frac{٤}{١٥}$ (= $\frac{٣}{١٥} + \frac{١}{٣\times٥}$ أى خُمْس دينار وثُلث خُمسِه) ، $\frac{٢}{٣}$ دينار ، $١ \frac{١}{٣\times٥}$ (دينار وثُلث خُمسِه) ، وديناران .

وإن كان المال الموجود ٢١ دينارًا (وهو $\frac{٧}{١٠}$ من مجموع الديون أى ($\frac{٥}{١٠} + \frac{٢}{١٠}$) من الديون ، أى نِصْفٌ وخُمْسٌ من ثلاثين) ، فتضرب دين كلٌّ فى النسبة $\frac{٧}{١٠}$ تحصل على نصيبه من المال الموجود ، فتكون الأنصبة على التوالى : $١ \frac{٢}{٥}$ ، $٣ \frac{١}{٢}$ ، $٥ \frac{٣}{٥}$ ، $١٠ \frac{١}{٢}$ دينارًا .

توافُقٌ بالـخُمْسِ ، وبالعُشْر وبنصف العُشْرِ والأقلّ أمْثَلُ . فتضربَ نِصْفَ العُشْرِ من الموجود وهو أربعة عشر فى تسعين . وتقسِمَ السّتّين والمائتيْن والألفَ ، على نِصْفِ العُشْرْ من الدُّيون . وهو خمسةٌ وعشرون ، يَخْرُجُ خمسون ، ويبقى عشرةٌ وهى خُمْسَان[1] .

فلزيدٍ من الموجودِ خمسون دينارًا وخُمْسَاه . وعلى هذا القياس فى الثلاثة الباقين . فلعمرٍو ستّةٌ وخمسون ، ولبكرٍ أربعةٌ وثمانون . ولخالدٍ تسعةٌ وثمانون دينارًا وثلاثةُ أخْمَاسِهِ .

وهذا الطريق يجرى فى الأوّل أيضًا ، فنى الصُّورة الأُولى من المثالِ تضرب كُلَّ ديْنٍ فى خُمْسِ العشرة ، وتقسِمَ الحاصلَ على خُمْسِ الثلاثين . وقس عليه الصُّوَرَ البَاقيةَ ، وإن تباينَا فاضرب أصْلَ كلٍّ دينٍ فى الموجودِ ، واقْسِمِ الحاصِلَ على الدّيونِ .

(١) بالنسبة إلى الخمسة والعشرين .

* شرح : يبين العاملى الحالة التى يكون فيها بين الديون والمال الموجود توافق . أى أن يكون لهما عامل مشترك . فى المثال مجموع الديون ٥٠٠ بينما المال الموجود (المتبقى بعد السرقة) هو ٢٨٠ ، والعددان ٥٠٠ ، ٢٨٠ كلٌّ منهما يقبل القسمة على ٢٠ ، فيكون بينهما توافق بنصفِ العشرِ .

$$\therefore \quad \frac{\text{المال الموجود}}{\text{مجموع الديون}} = \frac{٢٨٠}{٥٠٠} = \frac{١٤}{٢٥}$$

ولإيجاد نصيب كلٍّ من المال الموجود ، نضرب الدين فى ١٤ ونقسم الحاصل على ٢٥

فيكون نصيب زيد $= \frac{٩٠ \times ١٤}{٢٥} = ٥٠ \frac{٢}{٥}$ دينارًا

ونصيب عمرو $= \frac{١٠٠ \times ١٤}{٢٥} = ٥٦$ دينارًا

ونصيب بكر $= \frac{١٥٠ \times ١٤}{٢٥} = ٨٤$ دينارًا

ونصيب خالد $= \frac{١٦٠ \times ١٤}{٢٥} = ٨٩ \frac{٣}{٥}$ دينارًا

ويجمع هذه الأنصبة نحصل على المال الموجود .

مثاله : رأسُ مالٍ بين الجماعةِ ، لزيدٍ ألفٌ وخمسون درهمًا ، ولعمرٍو تسعُمائة وستَّة عشر ، ولبكرٍ أربعُمائةٍ وثلاثون ، ولخالدٍ ثلاثمائةٍ وسبعون ، فالمجموعُ ستَّةٌ وستُّون وسبعُمائة وألْفَا درهمٍ ، وقد حصُلَ منه نَماءٌ ، وهو خمسون وثلاثمائة دينار ، فتضربَ الخمسين والألفَ فى خمسين وثلاثمائة ، وتقسِمَ على سِتَّةٍ وستِّين وسبعمائة وألفَيْن ، يَخرُجُ اثنان وثلاثون ومائة ، ويبقى ثمانيةٌ وثمانون وثلاثمائة وألفان ، وهو كسْرٌ مكرَّرٌ ، مخرجُهُ المقسومُ عليه .

فلزيدٍ من النَّماءِ اثنان وثلاثون ومائةُ دينارٍ ، وثمانية وثمانون وثلاثمائة وألفا جزءٍ ، من ستَّةٍ وستين وسبعمائة وألفا جزءٍ من دينارٍ ، وعلى هذا القياسِ فى الباقييْن ، وهو يرجع إلى الأوَّلِ ، ويَعُمُّ الكلَّ .

وهذان الأخيران هما المشهوران فى المُدَوَّنَاتِ الفرائضيَّةِ ، ورُبَّما كان لكلٍّ دينٍ أو لبعضِها نسبةٌ معلومةٌ إلى الديونِ ، فلَكَ أنْ تقسِمَ الموجودَ على مَخرجِ النِّسبةِ ، فالخارجُ هو المطلوبُ .

شرح : فى المثال الثالث جماعة مكونة من زيد وعمرو وبكر وخالد لهم من رأس المال ١٠٥٠ ، ٩١٦ ، ٤٣٠ ، ٣٧٠ درهمًا على التوالى ، فيكون رأس مال الجماعة ٢٧٦٦ درهمًا ، وقد زاد هذا المال بالتنمية مبلغًا قدره ٣٥٠ دينارًا .

فيكون نصيب زيد من النماء = $\frac{١٠٥٠}{٢٧٦٦} \times ٣٥٠ = ١٣٢ \frac{٢٣٨٨}{٢٧٦٦}$ دينارًا

وعلى نفس القياس يُعيَّن نصيب الباقين .

مثاله : أُوصِىَ للجماعةِ ثلاثمائة دينار ، لزيدٍ مائة ، وهى ثُلُثٌ ، ولعمرٍو مائة وخمسون ، وهو نِصْفٌ ، ولبكرٍ ثلاثون ، وهو عُشْرٌ ، ولخالدٍ عشرون ، وهو ثُلُثُ الخُمْسِ ، ولم تنفذ . وثُلُثُ التّركةِ تِسْعٌ وخمسون ومائتا دينارٍ ، فاقْسِمْه على الثلاثة ، يخْرُجُ ستّةٌ وثمانون دينارًا وثُلُثٌ وهو لزيدٍ ، وعلى الاثنين يخْرُجُ تسعةٌ وعشرون ومائةُ دينارٍ ونصفٌ وهو لعمرٍو ، وعلى العشرة يخْرُجُ خمسةٌ وعشرون دينارًا ، وتسْعَةُ أعْشَارٍ وهو لبكرٍ ، وعلى الخمسة عشر يخْرُجُ سبعة عشر دينارًا وخُمْسٌ وثُلُثُ خُمْسِ دينارٍ وهو لخالدٍ .

شرح : فى المثال الرابع إن كان مجموع المال الموصى به ٣٠٠ دينار ، فنصيب زيد ١٠٠ ويعادل $\frac{١}{٣}$ المال ، ونصيب عمرو ١٥٠ ويقابل $\frac{١}{٢}$ المال ، ونصيب بكر ٣٠ ويساوى $\frac{١}{١٠}$ المال ، ونصيب خالد ٢٠ ويعادل $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٥}$ المال ، إلا أن هذه الوصية لم تنفذ ، وأصاب الجماعة ثلث التركة فقط حيث التركة تساوى ٢٥٩ ديناراً (بدلا من أصل الوصية البالغ ٣٠٠ ديناراً) .

.·. نصيب زيد $= \frac{١}{٣} \times ٢٥٩ = ٨٦ \frac{١}{٣}$ ديناراً

ونصيب عمرو $= \frac{١}{٢} \times ٢٥٩ = ١٢٩ \frac{١}{٢}$ ديناراً

ونصيب بكر $= \frac{١}{١٠} \times ٢٥٩ = ٢٥ \frac{٩}{١٠}$ ديناراً

ونصيب خالد $= \frac{١}{١٥} \times ٢٥٩ = ١٧ \frac{٤}{١٥}$ ديناراً

(أى ١٧ + $\frac{٣}{١٥}$ + $\frac{١}{٣\times٥}$: سبعة عشر ديناراً ، وخُمْسٌ ، وثلث خُمْس دينار)

أمّا إن كان ما أوصى به لزيد هو ٩٠ ديناراً (= $\frac{٣}{١٠}$ الوصية)

وما أوصى به لبكر هو ٤٠ ديناراً (= $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}$ الوصية)

فإنَّ نصيب زيد $= ٢٥٩ \times \frac{٣}{١٠} = ٢٥ \frac{٩}{١٠} \times ٣$

$= ٧٧ \frac{٧}{١٠}$ ديناراً

=

وإن تكرَّر كسرٌ فاضْرب الخارجَ فى عِدَّة المكرّر ليحصُلَ المطلوبُ ، كما إذا أُوصى فى المثال لزيدٍ بتسعين وهو ثلاثةُ أعْشَارٍ ، ولبكرٍ بأربعين وهو ثلثا خُمْسٍ ، فتضربَ خمسةً وعشرين وتسْعَةَ أعشارٍ فى الثلاثة ، يحصُل سَبْعَةٌ وسبعون دينارًا وسبْعَةُ أعشارِ دينارٍ ، وتضربَ سبعة عشر وخُمْسًا وثُلُثَ خُمْسٍ فى الاثنين ، يحصُلُ أربعةٌ وثلاثون وثُلثٌ وخُمْسٌ .

وبما مرَّ من القواعدِ يسْهُلُ الأمرُ فى المعطوف ، وهذا الأخيرُ يعُمُّ الثّلاثة ، وهو والأوَّلُ ممَّا تفرَّدُ به الرسالةُ ، وللدّيوانيِّين من أهلِ الرُّقومِ طريقٌ آخر يزيدون على سَطْرِ الموجودِ .

المِنَّةُ للهِ تعالَى وتقدَّس .

انتهى المخطوط

ونصيب بكر = ٢٥٩ × $\frac{٢}{١٥}$ = $١٧ \frac{٤}{١٥}$ × ٢

= $٣٤ \frac{٨}{١٥}$ = (٣٤ + $\frac{٥}{١٥}$ + $\frac{٣}{١٥}$) ديناراً

(أى أربعة وثلاثون وثُلث وخُمْس ، كما جاء فى النصّ)

قاعدة فى بيان تقسيم الغرماء[1]

تضربَ ديْنَ كُلٍّ واحدٍ من الغُرَماءِ فى التركةِ ، وتقسِمَ الحاصلَ على[2] مجموع الديون ، فخارجُ القسمة هو حَظُّ صاحب المضروب فى التركة .

مثالهُ : التركةُ عشرون ، وأحدُ الدُّيونِ ثمانيةٌ ، والآخر عشرةٌ ، والآخر اثنى عشر ، ومجموعُ الديُّون ثلثون .

ضربْنَا الأوَّل فى التركةِ ، حصُل مائة وستون ، قسمناه على مجموعِ خمسةٍ وثلث ، فهو حَظُّ صاحبِ الثمانيةِ ، ثم ضربنا الثانى وقسمنا الحاصلَ ، كذلك خرج ستة وثلثان وهو حَظُّ صاحبِ العشرةِ ، وعملنا بالدَّين الثالث ، كذلك حصل ثمانية وهو نصيبُ صاحبِ الاثنى عشر من التركة ، وهذا العملُ يكونُ إذا لم تكن الديونُ كثيرةً ، وإذا كانت كثيرةً بحيث يتعسَّرُ ضبطُ حاصِلِ ضربها[2] وقسمتها ، فارسم الجدولَ على هذه الصُّورةِ ، أى سُطُوره بِعِدَّة الدّيون ، وضع كُلٍّ واحدٍ من الدُّيون فيها ، أى فى خلالها ، وصورةَ التركةِ فوقَه ، وصورةَ مجموع الدُّيون تحتَه ، واعمل ما عرفت من ضربِ كُلٍّ من الديون فى التركةِ ، وقسمةِ الحاصلِ على مجموعِ الدُّيونِ ، ووضْعِ الخارجِ كذلك سهلاً عليك ، وصورة العمل هكذا : يعنى الدّيون

---

(١) مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب رقم ١٢٥٣ : الصفحات ٥٢ حتى ٥٥ .

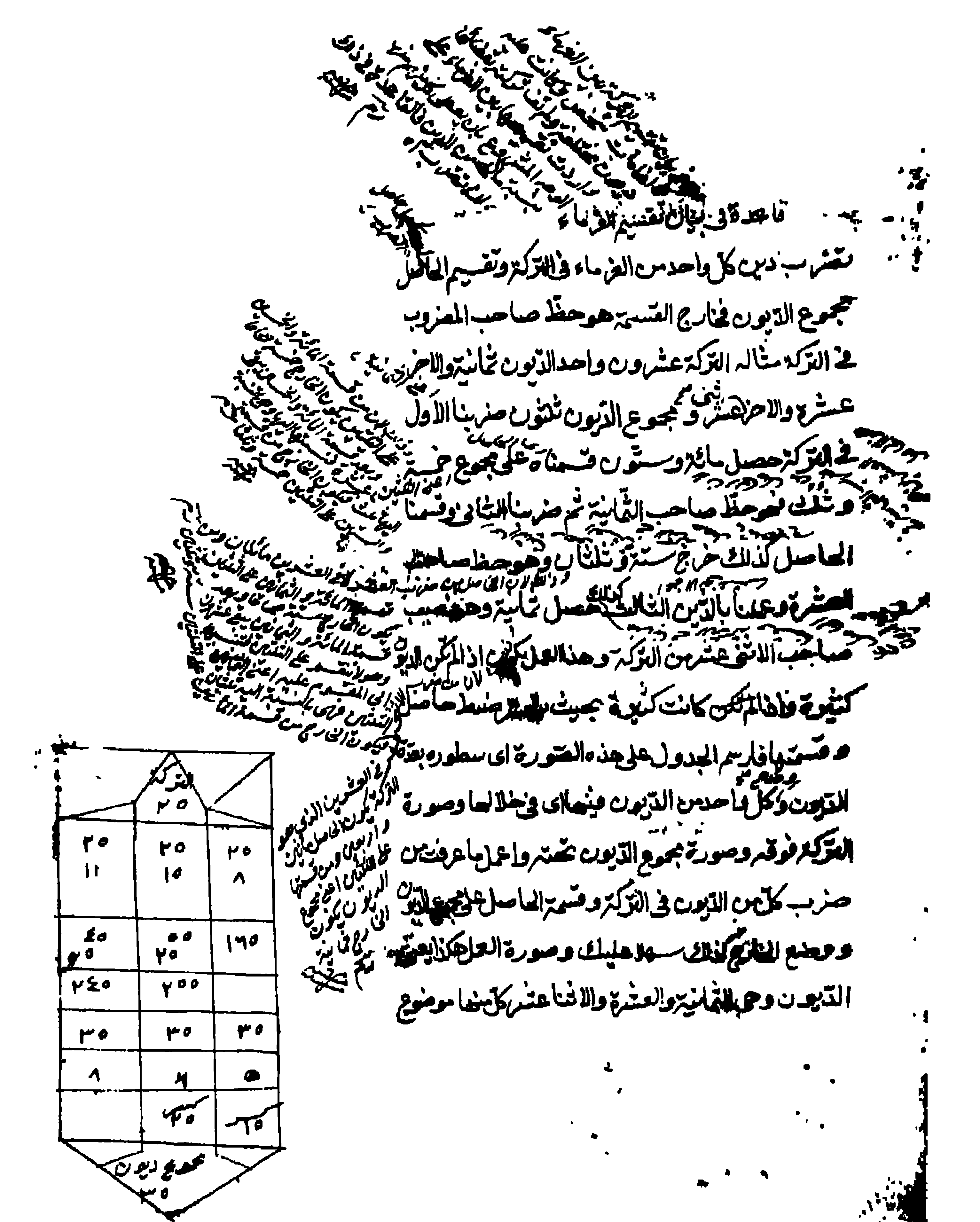
(٢) ناقصة فى المخطوط .

تعقيب : قد تكون هذه القاعدة من تصنيف رمضان الكوردى كما جاء بآخر المخطوط . وهى لا تخرج فى معانيها عما جاء بتذنيب العاملى فى مخطوطه .

فى هذا المخطوط يكتب الصفر : ٥ والخمسة :
كذا فى المخطوط ١٢٥٣ .

	التركة ٢٠	
٢٠ ٨	٢٠ ١٠	٢٠ ١٢
١٦٠	٠٠ ٢٠	٤٠ ٢٠
	٢٠٠	٢٤٠
٣٠	٣٠	٣٠
٥	٦	٨
كسر ١٠	كسر ٢٠	
	مجموع ديون ٣٠	

وهى الثمانيةُ ، والعشرةُ ، والاثنا عشر ، كلٌّ منها موضوعٌ فى علو سطرٍ من سطورِ الشكلِ موضوع فوقه صورة العشرين التى هى عبارةٌ عن التركةِ ، تحته الثّلثين التى هى عبارةٌ عن مجموع الدّيون ، وقد ضُرِب كلٌّ منها فى التركةِ ، ووُضِعَ حاصِلُ ضرْبه تحته بعد خطٍّ عرضىّ ، وقُسِمَ الحاصِلُ على مجموعِ الديْنِ ، ووضِعَ خارجُ القسمةِ تحت المقسوم عليه ، أعنى الثّلثين بعد خطٍّ عرضىٍّ ، وما بقِى من المَقسومِ كسْرًا رُسِمت صورُته تحت الخارجِ الصّحيحِ ، ورُسِمَ لفظُ كسْرٍ فوقه ، وما صورته صورته المركب فى الرسم ضرب ضرب المركب فى المركب ، ووضع حاصله تحته ، وضع مقتضى الضّرب ثم جمع ، كما هو القاعدة فى ضرب المركب فى المركب .



شكل (١٨)

قاعدة فى بيان تقسيم الغرماء : الصفحة (٥٢) من مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب ـ رقم ١٢٥٣

فالثّمانيةُ لمَّا لم تكن صورتُها المرسومةُ صورةَ المركَّبِ ، ضُرِبَت فى العشرين ، فكان حاصلُ ضربها هكذا ١٦٠ .

والعشرةُ لمّا كانت صورتُها صورة المركَّبِ فى الرَّسم ، ضُرِبَ فى العشرين الذى هو صورةُ التركةِ ، فكان صورةُ حاصِل ضربِهِ هكذا ٢٠٠ ، ثم جُمعَ فصار هكذا ٢٠٠ .

وقس عليه حالَ الاثنى عشر .

والامتحانُ ــ أى اختبارُ حالِ هذا النَّحو من القسمةِ صحَّةً وفسادًا ــ هو أن تعمَلَ فى كُلِّ واحدٍ بالمضروب والمضروب فيه كما فى الضرب ، وبالمقسوم والمقسوم عليه كما فى القسمةِ ، تظهر الصحَّةُ بعدها بأنْ يؤخذَ ميزانُ المضروب ، أعنى كُلَّ واحدٍ من الدُّيونِ على حدةٍ ، وتضربه فى ميزانِ المضروبِ فيه ــ أعنى التركة ــ وتأخُذَ ميزانَ الحاصِلِ ، وتحفظَ كميَّته ، ثمَّ تأخُذَ ميزانَ خارجِ قسمةِ حاصِلِ ضربِ ذلك الدَّين المضروبِ فى التركةِ ، وتضربه فى ميزانِ المقسومِ عليه ــ أعنى مجموعَ الدُّيون ــ وتزيدَ عليه ميزانَ الباقى من المقسِوم إن كان ، ثمَّ تأخذَ ميزانَ المقسومِ ــ وهو حاصلُ ضربِ ذَلك الدَّينِ فى التركةِ المقسوم على مجموع الديون ــ فإن لم تتخالف الموازينُ الثلّث ، فالعَملُ صحيحٌ ، وإلاّ فالعملُ خطأٌ .

فنى هذا الشكلِ مثلاً : الثمانيةُ أحدُ الدُّيونِ ، فهى مضروبةٌ ، والتركةُ مضروبٌ فيها ، والثمانيةُ نفسُها ميزانٌ ، فإذا ضَربتَها فى الاثنين اللّذين هما ميزانُ التركةِ ، حصُل ستّة عشر ، فإذا أخذْتَ ميزانها بأن أسقطت منها تسعةً ، بقى بعد الإسقاطِ سبعةٌ ، فهى ميزانُ الحاصِلِ . ثمَّ إذا أخذْتَ ميزانَ خارجِ قسمةِ مضروبِ الثمانيةِ فى التركةِ على مجموعِ الدُّيونِ ــ وهو الخمسةُ ــ ضربْتَه فى ميزان المقسومِ عليه ــ وهو ثلّث ــ لأنَّ الباقى من الثلّثين بعد الإسقاط تسعةً تسعةً ثلّثةٌ ، حصُل خمسة عشر ، فإذا أخذت على الحاصِلِ الباقى من المقسومِ ــ أعنى الثلّث ـ حصُل ستة عشر ، فإذا أخذتَ ميزانَ هذا الحاصِلِ بأنْ أسْقَطْت منه تسعةً ، بقى بعد الإسقاطِ أيضًا سبعةٌ ،

فهى الميزانُ لهذا الحاصِل . إذَا أخَذْت ميزانَ المقسِوم ـ وهو المائةُ والستون ـ بأنْ أسْقَطْتَ تسْعَةً تسْعةً ، كان الباقى بعد الإسقاطِ كذلك سبعةً أيضًا ، فلم تتخالف الموازينُ فى ضَرْبِ هذا المضروبِ ، أعنى الثمانيةَ . وإذا عمِلتَ فى الثانى والثالثِ أيضًا مِثْلَ عملِك هذا ، ولم تتخالف الموازينُ الثلَثِ فى كلٍّ منهما ، ظهرَ أنَّ هذه القسمة صحيحةٌ ، فقِسْ على هذا حال عملِ الثانى والثالثِ حتى يظهرَ لك الحالُ .

تمَّت الرسالةُ بعوْنِ الملكِ المنّان .

تصنيف رمضان الكوردى .

القسم الثانى

مسائل الحساب والجبر والمساحة

الواردة فى كتاب "الكشكول"* لبهاء الدين العاملى

* طبعة مصر عام ١٣٠٢هـ = ١٨٨٤م - المطبعة العامرة الشرفية
(مطبعة الشيخ شرف موسى ، بخان أبو طاقية بمصر)

مقدمة

تعرَّض بهاء الدين العاملى فيما تعرض له فى كتابه « الكشكول » لبعض جوانب العلم الرياضى . فأورد بعض مسائل متفرقة بعضها فى خواص الأعداد . والبعض الآخر فى الحساب والجبر والمقابلة . كما ذكر العاملى أيضًا بعض مسائل فى أعمال المساحة .

والمسائل التى جاءت فى « الكشكول » هى على وجه التحديد أربع وعشرون مسألة موزعة على النحو التالى :

١ ــ خواص الأعداد وجمع المتواليات : خمس مسائل

٢ ــ علم الحساب : ثمانى مسائل .

٣ ــ علم الجبر والمقابلة : خمس مسائل .

٤ ــ أعمال المساحة : ست مسائل .

وقد تعرَّضنا لهذه المسائل جميعها بما هى أهل له من الشرح والتحليل .

* * *

(١) خواص الأعداد وجمع المتواليات

تناول صاحب الكشكول فى هذا المجال تعريف العدد ، وبيان الأعداد المتحابَّة بيْد أنه لم يأت فيها بجديد حيث سبقه إليها ثابت بن قرّة الحرانى . ثم عرج العاملى إلى الأعداد التامة والزائدة والناقصة . وربط بين صفات آدم وحواء وبين خواص الأعداد . وقدَّم تفسيرًا للقول المنسوب إلى النبى عليه الصلاة والسلام من أنَّ حواء خُلِقَتْ من الضلع الأيسر (من اليسير أو القليل حسب قول العاملى) لآدم .

ولقد تعرَّض العاملى لقواعد إيجاد مجموع الأعداد على النظم الطبيعى (أى جمع المتوالية الحسابية التى أساسها الواحد) ، ومجموع الأزواج دون الأفراد . ومجموع

الأفراد دون الأزواج . كذا مجموع المربعات المتوالية ، ومجموع المكعبات المتوالية ، وهذه المتواليات جميعها قد سبق ورودها فى متن كتاب العاملى « خلاصة الحساب » الذى تعرضنا له بالشرح والتحليل فى القسم الأول من كتابنا هذا .

* * *

[١] « أجْمَعَ الحُسَّابُ على أنَّ تعريفَ العددِ بأنَّه نصفْ مجموعِ حاشيتيه . وهو لايصدُقُ على الواحدِ ، إذ ليس له حاشيةٌ تحتانية . وفيه نظر ، إذ الحاشيةُ الفوقانيَّةُ لكلِّ عددٍ تزيدُ عليه بمقدار نُقصانِ الحاشيةِ التحتانيةِ عنه . ومن ثمَّةَ كان مجموعها ضعفه .

وقد أجمعوا على أنَّ العددَ إمَّا صحيحٌ أو كسرٌ . فنقولُ الحاشية التحتانيةُ للواحدِ هى النِّصفُ ، فالفوقانية واحدٌ ونصفٌ ، لأنها تزيدُ على الواحدِ بقدرِ نقصانِ النِّصف عنه ، كما هو شأنُ حواشى الأعدادِ . والواحدُ نصفْ مجموعها .

فالتعريفُ المذكورُ صادقٌ على الواحدِ . بل نقولْ : التعريفُ المذكورُ صادقٌ على جميع الكسورِ أيضًا ، وليس مخصوصا بالصحاح . مثلاً يصدق على الثلث أنّه نِصْفُ مجموعِ حاشيتيه ، فالتحتانيةُ السدْسُ والفوقانيَّةُ ثلْثٌ وسُدْسٌ . أعْنِى نصْفًا ، ولاشك أنّ الثلْثَ نِصْفُ مجموعِ النِّصفِ والسُّدْسِ . وهو المرادُ » .

الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٢٨٢ (الجزء الثالث) .

شرح المسألة الأولى : يُعرَّفُ العددُ هنا بأنه نصفْ مجموع العدد السابق له والعدد اللاحق له (ويُعبرّ عنهما فى المتْنَ بالحاشيتين) . مثال ذلك الرقم ٥ نصف مجموع ٤ ، ٦ . وبالنسبة للواحد يقول العاملى إنَّ التعريفَ السابقَ ينطبقْ عليه أيضًا إذا اعتبرنا حاشيتيه هما $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ١ (أى أن الواحد حدًّا فى سلسلة عددية تزايدها $\frac{١}{٢}$) .

كذلك بالنسبة للكسر $\frac{١}{٣}$. فإذا اعتبرناه حدّ فى متوالية حسابية تتزايد حدودها بالقيمة $\frac{١}{٦}$. يكون الكسر $\frac{١}{٣}$ وسطًا حسابيًّا لـ $\frac{١}{٦}$ (وهو الحاشية التحتانية) ، ($\frac{١}{٣} + \frac{١}{٦}$) = $\frac{١}{٢}$ (وهو الحاشية الفوقانية) .

[٢] «للشيخِ الرئيسِ رسالةٌ فى العِشْقِ ، وقال فيها إنَّ العشقَ سار فى المجرَّدات والفلكيّات والعنصريّات والمعدنيّات والنباتات والحيوانات ، حتى إنَّ أربابَ الرياضى قالوا الأعداد المُتحابَّة ، واستدركوا ذلك على إقليدس ، وقالوا فاته ذلك ولم يذكره ، وهى :

المائتان والعشرون عددٌ زائدٌ ، أجزاؤه أكثر منه ، وإذا جُمعت كانت أربعةً وثمانين ومائتين بغير زيادةٍ ولا نقصانٍ .

والمائتان والأربعة والثمانون عددٌ ناقصٌ ، أجزاؤه أقلُّ منه ، وإنْ جُمعَت كانت جُملتُها مائتين وعشرين .

فلِكُلٍّ من العددين المُتحابَّين أجزاءٌ مثل الآخر :
فالمائتان والعشرون لها نِصْفٌ ، ورُبْعٌ ، وخُمْسٌ ، وعُشْرٌ ، ونصفُ عُشْرٍ ، وجزءٌ من أحدَ عشر ، وجزءٌ من اثنين وعشرين ، وجزءٌ من أربعةٍ وأربعين ، وجزءٌ من خمسةٍ وخمسين ، وجزءٌ من مائةٍ وعشرةٍ ، وجزءٌ من مائتين وعشرين ، وجملةُ ذلك من الأجزاءِ البسيطةِ الصحيحةِ مائتان وأربعةٌ وثمانون .

الكشكول ـ طبعة مصر ـ الصفحتان ١٩١ ، ١٩٢ (الجزء الثانى) .

شرح المسألة الثانية : يشير بهاء الدين العاملى ـ فى هذا النص إلى الأعداد المتحابة ، ويسوق لها مثلاً هو العددان ٢٢٠ ، ٢٨٤ : فالعدد ٢٢٠ يقبل القسمة على كلٍّ من الأعداد التالية (وهى عوامله) :

٢ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ١١ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٤٤ ، ٥٥ ، ١١٠ ، ٢٢٠

فتكون أجزاؤه على التوالى : ١١٠ ، ٥٥ ، ٤٤ ، ٢٢ ، ٢٠ ، ١١ ، ١٠ ، ٥ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ومجموع هذه الأجزاء هو ٢٨٤ . ومن ثمَّ فهى أكثر من العدد نفسه ، ومن هنا جاءت تسميته بعدد زائد . =

والمائتان والأربعةُ والثمانون ليس لها إلاَّ نِصْفٌ ، ورُبْعٌ ، وجزءٌ من أحدٍ وسبعين ، وجزءٌ من مائةٍ واثنين وأربعين ، وجزءٌ من مائتين وأربعةٍ وثمانين ، فذلك مائتان وعشرون .

فقد ظهرَ بهذا المثالِ تحابُّ العددين ، وأصحابُ العددِ يزعُمون أنَّ لذلك خاصية عجيبة فى المحبَّة . مُجرَّبٌ . انتهى » .

[٣] « أشرفُ الأعدادِ العددُ التامُّ ، وهو ما كانت أجزاؤه مساويةً له : قالوا ولهذا كان عددُ الأيام التى خُلقت فيها السَّمواتُ والأرضُ ، وهو السـتَّةُ ، كما نطقَ به الذكْرُ الحكيمُ .

وأمَّا العَدَدُ الزَّائدُ (أو) النَّاقِصُ فما زادت عليه أجزاؤه أو نقصت ، كالإثنى عشر فإنَّه زائدٌ ، والسَّبْعَةُ فإنَّها ناقِصةٌ ، إذ ليس لها إلاَّ السُّبْع .

= أما العدد ٢٨٤ فإنَّه من الممكن قسمته على كلٍّ من الأعداد (العوامل) :

٢ ، ٤ ، ٧١ ، ١٤٢ ، ٢٨٤ ، فتكون أجزاؤه على التوالى :

١٤٢ ، ٧١ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ومجموعها ٢٢٠ ، وهو أقل من العدد الأصلى ٢٨٤ ، ولذا يُسمَّى عدد ناقص .

يتَّضحُ فى هذا المثال أنَّ العدد ٢٢٠ يقبل القسمة على مجموعة من الأعداد (يُطلق عليها هنا عوامل العدد) تؤدى إلى أن يكون المجموع الحسابى لأجزائه هو ٢٨٤ ، بينما هذا العدد الأخير ٢٨٤ يقبل القسمة على مجموعة من الأعداد (العوامل) ليصبح المجموع الحسابى لأجزائه ٢٢٠ وهو العدد الأوَّل ، ومن ثمَّ تُطلقُ على العددين ٢٢٠ ، ٢٨٤ تسمية العددين المتحابَّين .

هذا ويُنسب إلى ثابت بن قرة الحرانى (٨٣٦ـ ٩٠١م) أنه توصَّل إلى قاعدة لإيجاد الأعداد المتحابة ، حيث إنه ألَّف فيها رسالة ، يوجد مصوَّرٌ لها فى معهد المخطوطات العربية بالقاهرة تحت رياضيات رقم ١٨ .

قال فى الأنموذج[1] وقد نظمتُ قاعدةً فى تحصيلِ العددِ التامِّ ، فقلتُ

حو با شد فرد أول ضعف زوج الزوج كم واحد

بودمضرب ايشان تا م وزنه ناقص وزايد

ومعناه أنَّه يؤخذُ زوجُ الزوجِ ، وهو زوجٌ لا يعدُّهُ من الأفرادِ سوى الواحد .

وبعبارةٍ أخرى عددٌ لا يعدُّه عددٌ فرْدٌ ، وهذا مبنيٌّ على أنَّ الواحدَ ليس بعددٍ كالاثنين فى المثال المذكور ، ويضعَّفُ حتى يصيرَ أربعةً ، ويُسقطُ منه واحدٌ فيصيرَ ثلاثةً ، وهو فَردٌ أوَّلٌ لأنَّهُ لا يعُّدهُ سوى الواحد فرد آخر وهو المراد بالفرد الأوّل ، فتضربَ الثلاثةَ فى الاثنين الذى هو زوجُ الزّوْجِ ، فيصيرَ ستّةً وهو العددُ التامُّ ، وقسْ عليه .

مثلاً تأخذ الأربعة ، وهو زوجُ الزّوْجِ ، وتضعِّفَه حتى يصير ثمانيةً ، وتسْقِطَ منه واحدًا ، فيصيرَ سَبْعةً ، وهو فردٌ أوّلُ ، فتضربَه فى الأربعةِ فيصير ثمانيةً وعشرين ، وهو أيضًا عددٌ تامٌّ .

ومن خواصِّ العَدَدِ التَّامِّ أنَّه لا يُوجدُ فى كُلِّ مرتبةٍ من الآحاد والعشرات وما فوقها إلاَّ واحدًا .

لا يُوجدُ مثلاً فى مرتبة الآحاد إلاَّ الستَّةَ ، وفى العشراتِ إلاّ الثمانيةَ والعشرين ، فقسْ واستخرج الباقى كما عرفت » .

المسألة الثالثة :

الكشكول ـ طبعة مصر ـ الصفحتان ٣٢٦ ، ٣٢٧ (الجزء الثالث) .

(١) للمحقق الدوانى

تعقيب : سبق أن تحدثنا بالتفصيل عن الأعداد التامة والزائدة والناقصة عند شرح القاعدة الثامنة الواردة بالباب التاسع من مخطوط « خلاصة الحساب » بالقسم الأول من الكتاب .

[٤] «قال بعض أصحاب الأرْتماطيقى :

إنَّ عددَ التسعةِ بمنزلةِ آدم عليه السلام ، فإنَّ للآحاد نسبة الأبوّة إلى سائرِ الأعدادِ .

والخمسةُ بمنزلة حوآ ، فإنّها التى يتولَّدُ منها مثلُها ، فإنَّ كُلَّ عدد فيه خمسةٌ ، إذا ضُرِبَ فيما فيه الخمسةُ ، فلا بُدَّ من وجود الخمسةِ بنفسِها فى حاصِل الضَّربِ البتة .

وقالوا فى قوله تعالى طه إشارة إلى آدم وحوآ ، وكلٌّ من هذين العددين إذا جُمِعَ من الواحدِ إليه على النظْم الطبيعىّ ، اجتمع ما يُساوى عددَ الاسِم المختصِّ به ، فإذا جمعنا من الواحد إلى التسعة ، كان خمسةً وأربعين ، وهى عددُ آدم ، وإذا جُمِعَ من الواحِدِ إلى الخمسةِ ، كان خمسةَ عشر ، وهى عدد حوآ .

وقد تقرَّرَ فى الحساب أنَّه إذَا ضُرِبَ عددٌ فى عددٍ ، يُقالُ لكلٍّ من المضروبين ضلعٌ ، وللحاصِل مضلعٌ .

المسألة الرابعة : الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٢٩١ (الجزء الثالث) .

شرح : يشير العاملى هنا إلى الربط بين صفات آدم وحواء وبين خواص الأعداد ، فينقل عن بعض أصحاب الأرتماطيقى (أى الحساب) قولهم بأن آدم يقابل رقم ٩ ، وأن حوآ تقابل رقم ٥ ، معتمدين فى هذه النسبة إلى أن التسعة هى كبرى الأرقام العشرة من الصفر إلى التسعة ، وبذلك تكون بمرتبة الأبوة بالنسبة إلى بقية الأرقام ، وأن الخمسة ينشأ عن ضربها فيما فيه الخمسة عدد فيه خمسة ، ومن ثمَّ وصفها بأنها التى يتولد منها مثلُها .

فإذا أخذنا رقم ٩ وجدنا أن مجموع الأرقام من الواحد إليه (أى ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩) = ٤٥ وهو عدد آدم ، ولتفسير ذلك يجدر بنا أن نشير إلى أن العرب ـ قبل استعمالهم للأرقام الهندية وتهذيبها ـ كانوا يشيرون إلى الأعداد بحروف الهجاء ، كما كان الحال عند اليونان فى صدر الفتح الإسلامى ، وذلك على النحو التالى :
=

وإذا ضُربت الـخمسةُ فى التسعةِ ، حصلَ خمسةٌ وأربعون ، وهى عددُ آدم ، وضلعاهُ التسعةُ والخمسةُ .

قالوا وما ورد فى لسان الشَّارِعِ صلوات الله عليه وآله من قولِه خُلِقت حوَّآ من الضِّلعِ الأيسرِ لآدم ، إنَّما ينكشفُ سرُّه بما ذكرناه ، فإنَّ الخمسة هى الضلعُ الأيسرُ للخمسة والأربعين ، والتسعةَ الضلعُ الأكبر ، والأيسرُ من اليسير وهو القليل ، لا من اليسار ، انتهى» .

أ	١	ح	٨	س	٦٠	ت	٤٠٠
ب	٢	ط	٩	ع	٧٠	ث	٥٠٠
جـ	٣	ى	١٠	ف	٨٠	خ	٦٠٠
د	٤	ك	٢٠	ص	٩٠	ذ	٧٠٠
هـ	٥	ل	٣٠	ق	١٠٠	ض	٨٠٠
و	٦	م	٤٠	ر	٢٠٠	ظ	٩٠٠
ز	٧	ن	٥٠	ش	٣٠٠	غ	١٠٠٠

ومن هنا فإن كلمة آدم تشتمل على الحروف أ ، د ، م ، وبالتالى يكون المقابل العددى لكلمة آدم هو :

أ + د + م = ١ + ٤ + ٤٠ = ٤٥

وهو نفس العدد الناتج عن جمع الأرقام من الواحد إلى التسعة (منزلة آدم) بتسلسلها الطبيعى .

كذلك الحال بالنسبة لكلمة حوآ ، فإن المقابل العددى لها هو :

ح + و + أ = ٨ + ٦ +١ = ١٥

وهو نفس العدد الذى نحصل عليه بجمع الأرقام من الواحد إلى الخمسة (منزلة حوآ) .

=

[٥] «جَمْعُ الأَعْدادِ على النَّظم الطبيعِيّ : بزيادةِ واحدٍ على الأخير ، وضربِ المجموعِ فى نصفِ الأخير.

وجمعُ الأزواجِ دون الأفرادِ : بِضَرْب نصفِ الزَّوْج الأخيرِ فيما يليه بواحدٍ ، والعكس بزيادةِ واحدٍ على الفردِ الأخيرِ ، وتربيع [نصف][1] الحاصلِ.

وجمعُ المربَّعاتِ المتوالية بزيادةِ واحدٍ على ضِعْفِ العددِ الأخيرِ ، وبضْربِ ثُلْثِ المجموعِ فى مجموعِ تلك الأعدادِ.

وجَمْعُ المكعَّباتِ المُتوالية بضرْبِ مجموعِ تلك الأعدادِ المُتوالية من الواحدِ فى نفسهِ».

يعرج العاملى بعد تناوله لجمع مكوّنات كلمتى آدم وحوآ ومنزلتهما من الأرقام إلى السّمات الناتجة عن عمليات الضرب ، فيبدأ بتعريف الضلع والمُضَلّع بأنَّ الضلع هو المضروب أو المضروب فيه ، وأن المضلع هو حاصل الضرب ، ويستطرد قائلاً بأن حاصل ضرب التسعة (وهى منزلة آدم) فى الخمسة (وهى منزلة حوآ) هو ٤٥ ، وهو عدد آدم كما تقدم ، فيكون ضلعا عدد آدم هما منزلتا آدم وحوآ (أى التسعة والخمسة).

وبناء على هذه الخواص يقال فى تفسير خَلْقِ حوآ من الضلع الأيسر لآدم بأنَّ منزلة حوآ وهى الخمسة هى الضلع الأصغر (الأيسر) من الضلعين ٩ ، ٥ المكونين للمضلع ٤٥ وهو عدد آدم.

* * *

المسألة الخامسة :

الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٣١٣ (الجزء الثالث).

(١) أضيفت لتتفق مع القاعدة الثانية من الباب التاسع من كتاب «خلاصة الحساب» ، وهى قاعدة صحيحة.

شرح المسألة الخامسة : يشير العاملى هنا إلى جمع المتواليات العددية على النظم الطبيعى ، كذا جمع المربعات المتوالية والمكعبات المتوالية ، وهو ما جاء ذكره تفصيلاً بقواعد الباب التاسع من كتابه «خلاصة الحساب» : =

= جمع الأعداد على النظم الطبيعى = (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ن)

$= (ن + ١) \frac{ن}{٢}$ (القاعدة الأولى)

جمع الأزواج دون الأفراد $= (٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + (ن - ٢) + ن)$

$= \frac{ن}{٢} . (\frac{ن}{٢} + ١)$ (القاعدة الثالثة)

جمع الأفراد دون الأزواج $= (١ + ٣ + ٥ + ٧ + ... + (ن - ٢) + ن)$

$= (\frac{ن + ١}{٢})^٢$ (القاعدة الثانية)

جمع المربعات المتوالية $= (١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ... + ن^٢)$

$= \frac{٢ن + ١}{٣} [١ + ٢ + ٣ + ... + ن]$

$= \frac{ن (ن + ١) (٢ ن + ١)}{١ \times ٢ \times ٣}$ (القاعدة الرابعة)

جمع المكعبات المتوالية $= (١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣ + ... + ن^٣)$

$= (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ن)^٢$

$= \left[\frac{ن (ن + ١)}{٢}\right]^٢$ (القاعدة الخامسة)

(٢) علم الحساب

جاء فى «الكشكول» ذكر ثمانى مسائل حسابية بعضها سبق وروده فى كتاب «خلاصة الحساب» ، والبعض الآخر لم يسبق وروده فيه ، كمسائل استخراج المُضمرات من الأسماء والأعداد ، كأسماء الأشخاص والشهور والبروج . كذلك عرض العاملى لبعض مسائل التباديل والتوافيق وذلك فيما يختص بإيجاد عدد الكلمات التى يُتحصَّلُ عليها من تركيب حروف المُعْجم بشروط معينة .

ولعلَّ أقيم ما قدَّمه صاحب الكشكول فى هذه المجموعة من المسائل الحسابية هو القاعدة التى أوردها لإيجاد قيمة جذر الأصمّ بالتقريب ، ويتضح ـ فى معرض شرحنا لهذه القاعدة ـ أنه عند تطبيقها على مثالين متباينين أن الخطأ الناشئ من التقريب فى حساب الجذر لم يتجاوز جزءًا من ألف جزء ، وبالتالى فالقاعدة تعطى نتائج على درجة عظيمة من الدقة ، وقاعدة العاملى هذه قد جاءت فى متن كتابه «خلاصة الحساب» ، وهو ما قمنا بشرحه وتحليله فى القسم الأول من كتابنا هذا .

* * *

[١] «إذا ضربت مخارج الكسور التى فيها حرف العين بعضها فى بعض حصل المخرجُ المشترك للكسورِ التسعة ، وهو ألفان وخمسمائة وعشرون .

ويُقال إنَّه سئِلَ عليٌّ كرَّم اللهُ وجهَه عن مخرج الكسور التِّسعة ، فقال للسائلِ : اضرب أيامَ سنتِك فى أيامِ أسبوعِك» .

المسألة : الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٢١٧ (الجزء الثالث) .

شرح : الكسور التسعة هى : $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{١٠}$.

ومخارج الكسور التى فيها حرف العين هى : أربعة ، سبعة ، تسعة ، عشرة

فحاصل ضرب هذه المخارج = ٤ × ٧ × ٩ × ١٠

= ٢٥٢٠ =

[٢] «حَوْضٌ أُرسلَ إليه ثلاثُ أنابيب تملؤه إحداها فى رُبْعِ يومٍ ، والأخرى فى سُدْسِهِ ، والأخرى فى سُبْعِهِ ، وفى أسفلِه بالوعةٌ تُفْرِغُهُ فى ثُمْنِ يومٍ ، فنى كم يمتلئ .

طريقُهُ أنه يُستعلَمَ ما يملؤه الجميعُ فى يومٍ ، وهو سبعة عشر حوضًا ، وما تفرغه البالوعةُ وهو ثمانية حياض ، فانقصه من الأوّلِ ، بقى تسعةٌ ، فنى اليوم يمتلئُ تسْعَ مرّاتٍ ، فيتلئ مرةً فى تُسْع النهار» .

= كذلك فإن المخرج المشترك (ويحصل عليه فى عملية توحيد مخارج الكسور) للكسور التسعة = ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٧ × ٣

= ٢٥٢٠ .

وهو يقبل القسمة على أى من مخارج الكسور التسعة .

وطبقاً للقول المنسوب إلى سيدنا على كرم الله وجهه . فإن مخرج الكسور التسعة (أى المخرج المشترك) = ٣٦٠ × ٧

= ٢٥٢٠

ومن الواضح صحة هذه الأقوال ، وتدل على قوة الملاحظة والميل إلى وضع القاعدة أو النتيجة الرياضية فى صورة يسهل تذكرها للعمل بها .

المسألة الثانية :

الكشكول ــ طبعة مصر ــ صفحة ٣١٣ (الجزء الثالث) .

شرح :

عدد الأحواض التى تملؤها الأنبوبة الأولى فى اليوم	= ٤ أحواض
عدد الأحواض التى تملؤها الأنبوبة الثانية فى اليوم	= ٦ أحواض
عدد الأحواض التى تملؤها الأنبوبة الثالثة فى اليوم	= ٧ أحواض
عدد الأحواض التى تملؤها الأنابيب الثلاث فى اليوم	= ١٧ حوضاً
عدد الأحواض التى تفرغها البالوعة فى اليوم الواحد	= ٨ أحواض =

[٣] «فى استخراج الاسم المُضْمَر :

مُرْهُ ليلقى أوّلَه ، ويخبَر بعددِ الباقى ، فاحفظه .

ثمَّ ليخبر بما عدا ثانيه ، ثمَّ بما عدا ثالثه ، وهكذا .

ثم اجمع المحفوظات ، واقسم الحاصلَ على عددِها بعد إلقاء محفوظٍ واحدٍ منها ،

= ∴ عدد الأحواض الممكن ملؤها (مع استمرار تفريغ البالوعة) فى اليوم الواحد
= ١٧ − ٨ = ٩ أحواض

وبالتالى يمتلئ الحوض فى زمن قدره $\frac{١}{٩}$ يوم .

المسألة الثالثة :

الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٤١ (الجزء الأول) .

شرح : نبدأ بتطبيق هذه القاعدة على مثلٍ محدد وليكن اسم «عمرو» وذلك لتوضيح منطوق القاعدة

∴ حروف الاسم	:	ع م ر و
المقابل العددى لكل حرف	:	٧٠ ٤٠ ٢٠٠ ٦
المحفوظ الأول	:	+ ٤٠ + ٢٠٠ + ٦ = ٢٤٦
المحفوظ الثانى	:	٧٠ + + ٢٠٠ + ٦ = ٢٧٦
المحفوظ الثالث	:	٧٠ + ٤٠ + + ٦ = ١١٦
المحفوظ الرابع	:	٧٠ + ٤٠ + ٢٠٠ + = ٣١٠
مجموع المحفوظات	:	**= ٩٤٨**

$$\frac{\text{مجموع المحفوظات}}{(\text{عدد المحفوظات} - ١)} = \frac{٩٤٨}{٣} = ٣١٦$$

∴المقابل العددى للحرف الأول = ٣١٦ − ٢٤٦ = ٧٠

والمقابل العددى للحرف الثانى = ٣١٦ − ٢٧٦ = ٤٠

والمقابل العددى للحرف الثالث = ٣١٦ − ١١٦ = ٢٠٠

والمقابل العددى للحرف الرابع = ٣١٦ − ٣١٠ = ٦

= والقاعدة التى قدمها العاملى صحيحة تماماً ، ومن الممكن إثباتها ـ فى صيغتها العامية ـ بالرموز على الوجه التالى :

نفرض أن الاسم المضمر يمكن التعبير عنه بالمقابل العددى لك حرف منه كما يلى :

$\text{ع}_1 \quad \text{ع}_2 \quad \text{ع}_3 \ldots\ldots\ \text{ع}_{\text{ن}}$ حيث ن عدد حروف الاسم المضمر

وبتطبيق القاعدة تتجمع لنا المحفوظات التالية (وهى بعدد حروف الاسم ن)

المحفوظ الأول = $\quad + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \text{ع}_4 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}$

المحفوظ الثانى = $\text{ع}_1 + \quad + \text{ع}_3 + \text{ع}_4 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}$

المحفوظ الثالث = $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \quad + \text{ع}_4 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}$

المحفوظ الرابع = $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \quad + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}$

المحفوظ الأخير = $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \text{ع}_4 + \text{ع}_5 \ldots + \text{ع}_{(\text{ن}-1)}$

∴ مجموع المحفوظات = $(\text{ن} - 1)\ [\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \text{ع}_4 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}]$

$$، \quad \frac{\text{مجموع المحفوظات}}{(\text{عدد المحفوظات} - 1)} = \frac{\text{مجموع المحفوظات}}{(\text{ن} - 1)}$$

$$= [\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \text{ع}_4 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}]$$

ويكون المقابل العددى للحرف الأول

$$= \left[\frac{\text{مجموع المحفوظات}}{(\text{عدد المحفوظات} - 1)} - \text{المحفوظ الأول}\right]$$

$$= (\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \text{ع}_4 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}})$$

$$- (\text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \text{ع}_4 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}})$$

$= \text{ع}_1$ وهو المطلوب

وقس على ذلك بالنسبة لبقية المقابلات العددية لأحرف الاسم المضمر ع_2 ، ع_3 ، $\text{ع}_4 \ldots$ حتى $\text{ع}_{\text{ن}}$.

ثم انقص من خارجِ القسمةِ المحفوظَ الأوّلَ ، فالباقى هو عددُ الحرف الأوّل .
ثم انقص منه المحفوظَ الثانى ، فالباقى هو عددُ الحرف الثانى ، وهكذا» .

[٤] «فى استخراج اسم الشهر المُضْمَر أو البرج المُضْمَر : مُرْه ليأخذ [للمضمر و](١) لكل ما فوق المضمر ثلاثة ثلاثة ، وله مع ما تحته اثنين اثنين ، ثم يخبرك بالمجموع ، فتُلْقى منه أربعة وعشرين ، وتعدّ الباقى من محرّم ، أو من الحمل . فما انتهى إليه فهو المضْمَرُ» .

المسألة الرابعة :
الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٤١ (الجزء الأول) .

(١) يبدو أنه سقط من الناسخ . حيث إن بدونه لا يستقيم القول .

شرح : حيث إنَّ عدَّة الشهور أو عدَّة البروج اثنا عشر . فإنَّ المسألة هى تحديد مرتبة من اثنى عشرة مرتبة . ويتضح من الشكل المرفق أنه بفرض العدد الدالّ على الشهر أو البرج المضمر س . وبأخذ ثلاثة ثلاثة للمضمر ولكل ما فوقه نحصل على : ٣س
وبأخذ اثنين اثنين لما تحته نحصل على : ٢(١٢ ـ س)
فيكون المجموع :
٣س ا ٢(١٢ ـ س)
= س + ٢٤

ما فوق المضمر (س − ١)	١	الشهر أو البرج الأول (محرم أو الحمل)
	المضمر	س
ما تحت المضمر (١٢ − س)	١٢	الشهر أو البرج الأخير

وبإسقاط ٢٤ من المجموع ننتهى إلى س وهى مرتبة الشهر أو البرج المضمر . فيُعَدُّ من شهر المحرم فى حالة الشهور . ومن برج الحمل فى حالة البروج .

ولنأخذ مثالاً على ذلك الشهر أو البرج السابع . فبالنسبة للمضمر وما فوقه نحصل على ٣ × ٧ . وبالنسبة لما تحته نحصل على ٢ × ٥ . فيكون المجموع ٢١ + ١٠ = ٣١ . وبإسقاط ٢٤ من ٣١ نحصل على ٧ وهو المرتبة المضمرة .

[٥] «فى استخراجِ العدد المُضْمَرِ :

مُرْهُ ليلقى منه ثلاثةً ثلاثةً ، ويخبرك بالباق . فتأخذَ لكلٍّ واحدٍ منه سبعين .

ثمَّ مُرْه ليلقى منه سبْعةً سبعةً ، ويخبرك بالباق . فتأخذ لكلٍّ واحدٍ منه خمسة عشر .

ثمَّ مُرْه ليلقى منه خمسةً خمسةً ، ويخبرك بالباق . فتأخذ لكلٍّ واحدٍ منه واحدًا وعشرين .

ثمَّ تجمعَ الحواصلَ ، وتلقى من المجتمِع مائةً وخمسة ، فما بقى فهو المطلوبُ . انتهى» .

المسألة الخامسة :
الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٤١ (الجزء الأول) .

تعقيب :

يُساورنا الشك فى صحة هذا النص حيث إنه بعد إسقاط ثلاثة ثلاثة من العدد المضمر ، وضرب الباقى فى سبعين ينتج عدد صحيح مضروب فى ٧ ، وبإلقاء (إسقاط) السبعات منه ـ فى الخطوة التالية ـ لا يتبقى شىء . كذلك الحال بالنسبة لضرب الباقى الثانى فى ١٥ حيث ينتج عددٌ صحيح مضروب فى ٥ ، وبإسقاط الخمسات منه لا يتبقى شىء .

نضيف إلى ما تقدم أن هذه القاعدة ـ عند ضبطها ـ لا تفيد فى حالة العدد المضمر الذى يقبل القسمة على ثلاثة ، حيث يكون الباقى الأول صفراً ، الأمر الذى يتوقف عنده العمل دون التوصُّل إلى العدد المضمر .

[٦] «إذا قيل كم يتحصّل من تركيب حروف المعجم كلمة ثنائية سواء كانت مبهمة أو مستعملة ، فاضرب ثمانية وعشرين فى سبعة وعشرين ، فالحاصل جواب .

فإن قيل كم يتركب منها كلمة ثلاثية بشرط أن لا يجتمع حرفان من جنس ، فاضرب حاصل ضرب ثمانية وعشرين فى سبعة وعشرين فى ستة وعشرين ، يكن تسعة عشر ألفًا وستمائة وستة وخمسين .

وإن سُئلت عن الرباعية ، فاضرب هذا المبلغ فى خمسة وعشرين : والقياسُ فيه مطَّردٌ فى الخماسىّ فما فوق . انتهى» .

المسألة السادسة :
الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ١٥ (الجزء الأول) .

شرح : لما كانت حروف الهجاء ثمانية وعشرين ، فإن تكوين كلمة ثنائية باستعمال الحرف الأول أ مع كل من بقية حروف الهجاء يؤدى إلى ٢٧ كلمة سواء كانت هذه الكلمة مستعملة أو غير ذات المعنى . وإذا كررنا العمل نفسه بالنسبة للحرف الثانى ب حصلنا على ٢٧ كلمة أخرى ، وهكذا بالنسبة لبقية حروف المعجم ، فيكون المتحصل من تركيب حروف المعجم كلمة ثنائية هو

٢٨ (٢٨ − ١) = ٢٨ × ٢٧

أما إذا كان المطلوب تكوين كلمة ثلاثية بحيث لا يجتمع فيها حرفان من نفس النوع ، فإنه باتباع الأسلوب السابق نحصل على عدد الكلمات الآتية :

عدد الكلمات الثنائية × (عدد حروف المعجم ـ الحرفين الداخلين فى الكلمة الثنائية)

أى ٢٨ × (٢٨ − ١) × (٢٨ − ٢)

= ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ = ١٩٦٥٦ كلمة ثلاثية

وبنفس القياس يكون عدد الكلمات الرباعية التى لا يتكرر فيها حرف هو ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٢٥

والكلمات الخماسية : ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٢٥ × ٢٤ =

= أى ٢٨ (٢٨ – ١) (٢٨ - ٢) (٢٨ – ٣) (٢٨ – ٤)

ومثل هذه المسألة يُدرَّس اليوم فى باب التباديل والتوافيق . ولكى نزيد الأمر وضوحاً . لنفرض أن لدينا خمسة حروف هجائية . والمطلوب معرفة عدد الكلمات الممكن تركيبها من هذه الحروف الخمسة بشرط عدم تكرار أى حرف فى نفس الكلمة

ولتكن الحروف ا ب جـ د هـ

فإذا احتفظنا بالمجموعة الرباعية ا ب جـ د ثابتة كان هناك حلان فقط . أو تبديلان هما :

إما ا ب جـ د هـ
وإما هـ ا ب جـ د

التباديل = ٢

وإذا قصرنا ثبات الترتيب على الأحرف الثلاثة الأولى فحسب . حصلنا على التباديل الآتية :

ا ب جـ د هـ
ا ب جـ هـ د
د ا ب جـ هـ
د هـ ا ب جـ
هـ ا ب جـ د
هـ د ا ب جـ

التباديل = ٢ × ٣

وبنفس المنطق نجد أنه عند الاحتفاظ بالحرفين الأولين ثابتى الترتيب ، فإن عدد التباديل الممكنة ، أى عدد الكلمات الممكن تركيبها تحت هذه الشروط هى :

٢ × ٣ × ٤

أمّا إن رفعت القيود عن أى ترتيب لمجموعة من الحروف ، فإن عدد التباديل بالنسبة للحروف الخمسة

= ٢ × ٣ × ٤ × ٥

أو = ٥ × (٥ – ١) × (٥ – ٢) × (٥ – ٣) × (٥ – ٤)

وهو ما نسميه اليوم مضروب ٥ ونعبر عنه رياضيًّا بالرمز ٥ ! =

= فيكون عدد الكلمات الممكن تركيبها من خمسة أحرف معينة بشرط عدم تكرار أى حرف منها فى الكلمة الواحدة

= مضروب ٥ = ٥ !

= ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ كلمة

أما إن كان المطلوب تكوين كلمة ثنائية فقط باستعمال حرفين من الحروف الخمسة المحددة . فإننا نعود إلى نوع المسألة التى أوردها العاملى وتدخل لا فى التباديل وإنما فى التوافيق . وفى هذه الحالة يمكن التعبير عن الحل رياضيًّا على الصورة :

٥ $ق_{٢}$ = ٥ × ٤ = ٢٠ كلمة (الطرف الأيسر يشمل حدين فقط)

وإن كان المطلوب تركيب كلمة ثلاثية بدلاً من ثنائية مع بقية الشروط المبينة يكون الجواب : ٥ $ق_{٣}$ = ٥ × (٥ − ١) × (٥ − ٢)

= ٥ × ٤ × ٣

= ٦٠ كلمة

وللكلمة الرباعية : ٥ $ق_{٤}$ = ٥ × (٥ − ١) × (٥ − ٢) × (٥ − ٣)

= ١٢٠ كلمة

وللكلمة الخماسية : ٥ $ق_{٥}$ = ٥ !

= ١٢٠ كلمة أيضاً

وإذا أردنا التعبير ــ بالرموز الرياضية ــ عن مسألة العاملى نقول :

عدد الكلمات الثنائية المركبة من حروف المعجم = ٢٨ $ق_{٢}$

= ٢٨ × ٢٧ = ٧٥٦ كلمة

عدد الكلمات الثلاثية المركبة من حروف المعجم = ٢٨ $ق_{٣}$

= ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ = ١٩٦٥٦ كلمة

عدد الكلمات الرباعية المركبة من حروف المعجم = ٢٨ $ق_{٤}$

= ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٢٥

= ٤٩١٤٠٠ كلمة

وعدد الكلمات الخماسية المركبة من حروف المعجم = ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٢٥ × ٢٤

= ١١٧٩٣٦٠٠ كلمة .

[٧] «كلُّ عددٍ قُسِمَ على عددٍ فيكون نسبةُ الخارجِ من القسمةِ إلى مُرَبَّعه كنسبةِ المقسوم عليه إلى المقسوم.

فإذا أردْنا أن نُحصِّلَ مجذورًا يكون نسبتُه إلى جذْرِه كنسبةِ عددٍ إلى عدد آخر، نقسم العدد الأوَّلَ على العددِ الثانى، فما خرج من القسمةِ يكونُ مضروبُه فى نفسِه العدَدَ المطلوبَ».

المسألة السابعة:
الكشكول - طبعة مصر - صفحة ٣٣٠ (الجزء الثالث).

شرح: لنرمز - فى الشِقِّ الأول من النصِّ - للعدد المقسوم بالحرف ن وللعدد المقسوم عليه بالحرف م، فيكون المقابل الرياضى للنص هو:

$$\frac{\frac{ن}{م}}{(\frac{ن}{م})^{٢}} = \frac{م}{ن} = \text{نسبة المقسوم عليه إلى المقسوم}$$

وهو صحيح وواضح من اختصار الكسر.

أمَّا بالنسبة للشِقِّ الثانى من النص، فيمكن تمثيله رياضيًا على الوجه التالى:

إذا كانت $\frac{ن}{\sqrt{ن}} = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ حيث $ع_{١}$، $ع_{٢}$ عددان

فإنَّ $ن = (\frac{ع_{١}}{ع_{٢}})^{٢}$

وهى النتيجة المباشرة لتربيع طرفى المعادلة السابقة.

[٨] «يحصل جذْرُ الأصمِّ بالتقريب بأنْ تأخُذَ أقربَ الأعدادِ المجذورة إليه . ويُسقَطَ منه ، ويحفظَ الباقى ، ثمَّ تأخُذَ جذْرَه وتُضعِّفَهُ وتزيدَ عليه واحدًا . ثم تنْسِبَ ما يبقى بعْدَ الإسقاطِ إلى الحاصِلِ ، ثمَّ تزيدَ على جذْرِهِ حاصِلَ النِّسبة ، فالمجتمعُ جذرُ الأصمِّ . انتهى» .

المسألة الثامنة :

الكشكول ــ طبعة مصر ــ صفحة ٣٢٩ (الجزء الثالث) .

شرح : لنفرض أن المطلوب إيجاد جذر ع . وأن $ن^٢$ أقرب مربعات الأعداد الصحيحة إلى ع . وبالتالى يمكن وضع ع على الصورة :

ع = ($ن^٢$ + م) حيث م هو الباقى بعد إسقاط $ن^٢$ من ع .

وطبقاً للنص فإن بهاء الدين العاملى يذكر القيمة التالية لجذر ع :

$$\sqrt{ع} = \left[ن + \frac{م}{٢ن + ١} \right]$$

مثال ذلك $\sqrt{١١} = (٣ + \frac{٢}{٢ \times ٣ + ١}) = ٣ \frac{٢}{٧} = ٣{,}٢٨٥٧١٤$

أما القيمة الصحيحة فهى : $\sqrt{١١} = ٣{,}٣١٦٦$

فيكون الخطأ فى القيمة المقرَّبة حسب هذه المعادلة هو : - ٠,٩٣٪

مثال آخر هو $\sqrt{١٥٣}$:

$$١٥٣ = (١٤٤ + ٩) = (١٢^٢ + ٩)$$

$$\therefore ن = ١٢ ، م = ٩ \quad \sqrt{١٥٣} = ١٢{,}٣٦$$

بينما القيمة الصحيحة لجذر ١٥٣ هى ١٢,٣٦٩٣

فيكون الخطأ فى القيمة التقريبية هو : - ٠,٠٧٥٪

هذا وقد أتينا على ذكر هذه القاعدة فى صدر الفصل السادس من الباب الأول من كتاب «خلاصة الحساب» للعاملى .

(٣) علم الجبر والمقابلة

يضم كتاب «الكشكول» خمس مسائل فى الجبر والمقابلة ، منها مسألتان عدديتان ، والثلاث الباقيات مسائل رمزية عامة ، تختص بعلاقات المربَّعات (أى المجهولات المرفوعة للقوة الثانية من أمثال س٢ ، ص٢) وحواشيها (ما يسبقها وما يليها) وجذورها ، وهى فى مجموعها مسائل جبرية مباشرة .

[١] «سمعَ رجلان رجلاً ينادى على سلعةٍ .
فقال أحدُهما للآخر : إن أعطيتنى ثُلْثَ ما معك ، وضممته إلى ما معى ، تمَّ لى ثمنُها .

وقال له الآخر : إن ضممتَ رُبْعَ ما معك إلى ما معى ، تـمَّ لى ثمنُها .

طريقُ هذه المسألة وأمثالها :

أن يُضرَبَ مخرجُ الثلْثِ فى مخرجِ الرُّبْعِ ، وينْقَص من الحاصلِ واحدٌ ، فالباقى ثمنُها ، فَينقص من الحاصل ثلْثُه ، فيبقى ما مع أحدهما ، وهو ثمانيةٌ ، ثُمَّ ربعه فيبقى ما مع الآخر ، وهو تسعةٌ» .

المسألة الأولى :

الكشكول ــ طبعة مصر ــ صفحة ٢١٦ (الجزء الثالث) .

تعقيب : هذه المسألة هى بعينها المسألة السادسة من الباب العاشر بكتاب «خلاصة الحساب» لنفس المؤلف .

[٢] «نريدُ عددًا إذا ضُوعِف وزيدَ على الحاصلِ واحدٌ ، وضُرِبَ الكلُّ فى ثلاثةٍ ، وزيدَ على الحاصلِ اثنان ، ثمَّ ضُربَ ما بلغ فى أربعةٍ ، وزيدَ على الحاصلِ ثلاثٌ ، بلغَ خمسةً وتسعينَ .

فبالجبرِ فرضناهُ شيئًا ، وعملنا ما قاله السائلُ ، فانتهى العملُ إلى أربعةٍ وعشرين شيئًا وثلاثةٍ وعشرين عددًا تعدِلُ خمسةً وتسعين . أسقطنا المْشترك ، بقى أربعةٌ وعشرون شيئًا مُعادلاً لاثنين وسبعين ، وهى الأولى من المفردات . قسمْنا العدَدَ على عددِ الأشياءِ ، خرج ثلاثةٌ وهو المجهولُ .

وبالعمل بالعكس نقصنا من الخمسة والتسعين ثلاثة ، وقسمنا الباقى على أربعة ، ونقصنا من الخارج اثنين ، وقسمنا الباقى على ثلاثةٍ ، ونقصْنا من الخارجِ ــ وهو السبعةُ ــ واحدًا ، ونصَّفْنا الباق .

وبالخطأين : الفرضُ الأولُ اثنان ، الخطأ الأول أربعةٌ وعشرون ناقصة . الفرضُ الثانى خمسة ، الخطأُ الثانى ثمانيةٌ وأربعون زائدةٌ . المحفوظُ الأوَّل ستَّةٌ وتسعون ، المحفوظُ الثانى مائةٌ وعشرون ، والخطآن مختلفان ، فقسمنا مجموعَ المحفوظين ــ وهو مائتان وستةُ عشر ــ على مجموع الخطأين : وهو اثنان وسبعون ــ خرج ثلاثةٌ ، وهو المطلوب» .

المسألة الثانية :

الكشكول ــ طبعة مصر ــ صفحة ٢٧٢ (الجزء الثالث) .

شرح : إذا رُمز للعدد المجهول (أوالشىء) بالرمز س ، فإنَّ منطوق المسألة يكون على الوجه الآتى :

$$[(٢ \text{ س} + ١) \times ٣ + ٢] \times ٤ + ٣ = ٩٥$$

أى أن ٢٤ س + ٢٣ = ٩٥ وبإسقاط العدد المشترك وهو ٢٣ من طرف المعادلة ، نحصل على المعادلة :

٢٤ س = ٧٢ وهى معادلة من الدرجة الأولى . =

= وهى ما عبَّر عنها المؤلفُ بأربعةٍ وعشرين شيئًا مُعَادلاً لاثنين وسبعين . وبقسمة العدد (وهو ٧٢) على عدد الأشياء (وهو ٢٤) . نحصل على قيمة الشىء أو العدد المجهول :
س = ٣ .
هذا هو حلُّ المسألة بطريق الجبر والمقابلة . ونصل إلى نفس الجواب بالعمل بالعكس .

أمَّا حل المسألة باستخدام حساب الخطأين . فيتم على الوجه التالى :

بالمفروض الأول	= ٢	. يكون الخطأ الأول	= – ٢٤
وبالمفروض الثانى	= ٥	. يكون الخطأ الثانى	= ٤٨
المحفوظ الأول	= المفروض الأول × الخطأ الثانى		= ٩٦
، المحفوظ الثانى	= المفروض الثانى × الخطأ الأول		= – ١٢٠

∴ العدد المطلوب = [مجموع المحفوظين] / [مجموع الخطأين]
(حيث إن الخطأين مختلفا الإشارة)

= ٢١٦ / ٧٢ = ٣ وهو المطلوب

[٣] «كلُّ مُربعٍ فهو يزيدُ على حاصِلِ ضرْب جذْرِ كُلٍّ من المربَّعين اللّذين هما حاشيتاه فى جذر الآخر بواحدٍ» .

[٤] «التفاضُلُ بين كلٍّ مربعين بقدْرِ حاصِلِ ضرْبِ مجموعِ جذْريهما فى التفاضُل بين ذينك الجذْرين» .

المسألة الثالثة :

الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٢١٧ (الجزء الثالث) .

شرح المسألة الثالثة : نفرض ضلع (أو جذر) المربع س

فيكون حاشيتاه : (س − ١) ، (س + ١)

فطبقًا للقاعدة المبينة بالمتن :

$$\text{س}^2 = \sqrt{(\text{س} - ١)^2} \,.\, \sqrt{(\text{س} + ١)^2} + ١$$

وبإجراء عملية الضرب فى الطرف الأيسر من المعادلة

$$\sqrt{(\text{س} - ١)^2} \,.\, \sqrt{(\text{س} + ١)^2} = (\text{س} - ١)(\text{س} + ١)$$
$$= \text{س}^2 - ١$$

ويصبح الطرف الأيسر من المعادلة $= (\text{س}^2 - ١) + ١ = \text{س}^2$

∴ فقول العاملى صحيح تمامًا .

* * *

المسألة الرابعة :

الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٣٣٨ (الجزء الثالث) .

شرح المسألة الرابعة : يقصد بالتفاضل هنا الفرقُ ـ والصورة الرياضية لهذا المنطوق هى :

$$(\text{س}^2 - \text{ص}^2) = (\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص})$$

فبإجراء عملية ضرب القوسين فى الطرف الأيسر من المعادلة ينتج :

$$(\text{س}^2 - \text{س ص} + \text{س ص} - \text{ص}^2) = (\text{س}^2 - \text{ص}^2)$$

= الطرف الأيمن من المعادلة

فالقول الوارد فى المتن صحيح .

[٥] «كلُّ مُربَّعٍ فالفضْلُ بينه وبين أقربِ المربَّعاتِ التى تحتَه إليه يُسَاوى مجموعَ جذْريهما ، والفَضْلُ بينه وبين أقْربِ المربَّعاتِ التى فوقه إليه يُساوى مجموعَ جذْرَيهما» .

المسألة الخامسة :

الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٣٠٤ (الجزء الثالث) .

شرح المسألة الخامسة : لنفرض المربع (ن + ١)^{٢} ، فيكون أقرب المربعات التى تحته إليه هو ن^{٢}

فطبقًا لمنطوق المؤلِّف .

(ن + ١)^{٢} − ن^{٢} = (ن + ١) + ن

وهذا صحيح تماما حيث إنه بتربيع القوس فى الطرف الأيمن للمعادلة نجد أن ن^{٢} + ٢ ن + ١ − ن^{٢} = ٢ ن + ١ = (ن + ١) + ن

وبالمثل إذا فرضنا المربع ن^{٢} ، فإن أقرب المربعات التى فوقه إليه هو (ن + ١)^{٢} ، فيكون

(ن + ١)^{٢} − ن^{٢} = (ن + ١) + ن وهى نفس المعادلة المتقدمة .

مثال ذلك المربعين ١٦ ، ٩ :

فإن الفضل بينهما = ١٦ − ٩ = ٧

ومجموع جذريهما = ٣ + ٤ = ٧ = الفضل بين مربعيهما

كذلك المربعين ٤٩ ، ٦٤ :

فالفضل بينهما = ٦٤ − ٤٩ = ١٥

ومجموع جذريهما = ٧ + ٨ = ١٥ ويعادل الفضل بين مربعيهما .

(٤) أعمـال المسـاحة

يضم «الكشكول» عدّة مسائل وطرق تعرِض لجوانب مختلفة فى مجال أعمال المساحة منها :

١ ـ كيفية قياس حجم الجسم غير المنتظم (الجسم غير الهندسى) .

٢ ـ تحديد حصص من الأرض من واقع معلومات وشروط معينة .

٣ ـ كيفية قياس ارتفاع المرتفعات دون الاستعانة بالاسطرلاب .

٤ ـ طرق تعيين فروق المنسوب (فروق الارتفاعات) بين مواضع مختلفة ، وهى ما يُعبَّر عنها فى أعمال العاملى بطُرُق وَزْن الأرض ، وهذه عملية هامة لشق الأنهر والقنوات .

٥ ـ طريقة لتعيين ارتفاع الشمس دون استخدام للاسطرلاب أو لآلة ارتفاع .

* * *

[١] «تستعلم مساحة الأجسام المشكلة المساحة ـ كالفيل والجمل ـ بأن يُلقى فى حوضٍ مربعٍ ، ويُعلَمَ الماءُ ، ثم يُخرجَ منه ويُعلم أيضًا ، ويُمسح ما نقُصَ ، فهو المساحة تقريبًا . انتهى» .

المسألة الأولى :
الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ١٥ (الجزء الأول) .

شرح المسألة الأولى : يبين العاملى هنا طريقة تعيين حجم الجسم غير المنتظم كجسم الفيل أو جسم الجمل مثلاً ، وذلك بإلقاء الجسم فى حوض ماء ، وقياس مقدار إزاحة الجسم للماء ، فيكون قدر حجم الجسم ، ويستعمل العاملى هنا لفظَ المساحة فى معنى قياس الحجم ، وليس فى معنى مساحة السطوح .

[٢] يروى الشيخ بهاء الدين العاملى عن والده ما نصُّه :

«قال جامعُهُ من خطِّ والدى قدَّس الله روحه :

(**مسألة**) قطعةُ أرضٍ فيها شجرةٌ مجهولةُ الارتفاع ، فطار عصفورٌ من رأسها إلى الأرض إلى انتصاف النهار والشمس فى أول الجدى فى بلدٍ عرضُه إحدى وعشرون درجةً ، فسقَطَ على نقطةٍ من ظِلِّ الشجرةِ ، فباعَ مالكُ الأرضِ من أصلِ الشجرةِ إلى تلك النقطة لزيدٍ ، ومن تلك النقطةِ إلى طرفِ الظلِّ لعمرو ، ومن طرْفِ الظلِّ إلى ما يساوى إرتفاعَ تلك الشجرةِ لبكرٍ ، وهو نهاية ما يملكهُ من تلك الأرضِ ، ثمَّ زالت تلك الشجرةُ ، وخفى علينا مقدارُ الظلِّ ، ومسقطُ العصفورِ ، وأردنا أن نعرفَ مقدارَ حصَّةِ كُلٍّ واحدٍ لندفعها إليه ، والفرضُ أنَّ طولَ كلٍّ من الشجرةِ والظلِّ وبُعْدِ مسقطِ العصفورِ عن أصلِ الشجرةِ مجهولٌ ، وليس عندنا من المعلومات شىءٌ سوى مسافاتِ طيرانِ العصفورِ ، فإنَّها خمسةُ أذرعٍ ، ولكنَّا نعلمُ أنَّ عددَ أذرعِ كلٍّ من المقادير المجهولةِ صحيحٌ لا كسرَ فيها .

وغرضُنا أن نستخرجَ هذه المجهولاتِ من دون رجوعٍ إلى شىءٍ من القواعدِ المقررة فى الحساب من الجبر والمقابلة والخطأين وغيرهما ، فكيف السبيل إلى ذلك .

(أقول) هكذا وجدْتُ بخطِّ والدى قدّس سره ، والظاهرُ أنَّ هذا السؤال له طاب ثراه .

ويخطُرُ ببالى أنَّ الجوابَ عن هذا السؤالِ أنْ يُقال : لمَّا كانت مسافة الطيرانِ وترَ قائمةٍ ، وكان مربَّعُها مُساويًا لمجموع مُرَبَّعى الضلعين بالعروس ، فهو خمسةٌ وعشرون ، وينقسمُ إلى مُرَبَّعين صحيحين أحدهما ستة عشر ، والآخر

المسألة الثانية :

الكشكول ـ طبعة مصر ـ الصفحتان ١٢٧ ، ١٢٨ (الجزء الثانى) .

تسعة ، فأحدُ الضلعين المحيطين بالقاعدةِ أربعةٌ ، والآخر ثلاثةٌ ، والظلُّ أيضًا أربعةٌ ، لأنَّ ارتفاع الشمسِ ذلك الوقت فى ذلك العرض خمسةٌ وأربعون ، لأنَّه الباقى من تمام العَرْضِ ، وهو تسعٌ وستون ، إذا نُقِصَ منه أربعةٌ وعشرون ، أعنى الميل الكلىّ ، وقد ثبت فى محله أنَّ ظلَّ ارتفاعِ خمسةٍ وأربعين لابدَّ أنْ يساوىَ الشاخصَ ، فيظهرُ أنَّ حِصَّةَ زَيْدٍ من تلك الأرضِ ثلاثةُ أذرعٍ ، وحصَّةَ عمرو ذراعٌ ، وحصَّةَ بكرٍ أربعةُ أذرعٍ ، وذلك ما أردناه .

ولا يخفى أنَّ فى البرهانِ على مُساواةِ ظِلٍّ ارتفاع به للشاخص نوع مساهلةٍ أوردتها فى بعض تعليقاتى على رسالة الاسطرلاب . لكنَّ التفاوت قليلٌ جدًّا لا يظهرُ للحسِّ أصْلاً ، فهو كاف فيما نحن فيه . انتهى » .

شرح المسألة الثانية : فى هذه المسألة يُطلب تحديد أنصبة من الأرض بناء على معلومات معطاة مع الوفاء بشروط محددة . ويبين شكل (١٩) توضيحًا هندسيًّا لهذه المسألة . ومنه يتبيَّن لنا الآتى :

المثلث أ ب د مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين حيث إن شُعاع الشمس يميل بزواية قدرها ٤٥ْ على خط الأفق . كذلك فإن المثلث أ ب حـ مثلث قائم معروف فيه الوتر وهو مسافة طيران العصفور وتساوى ٥ أذرع .

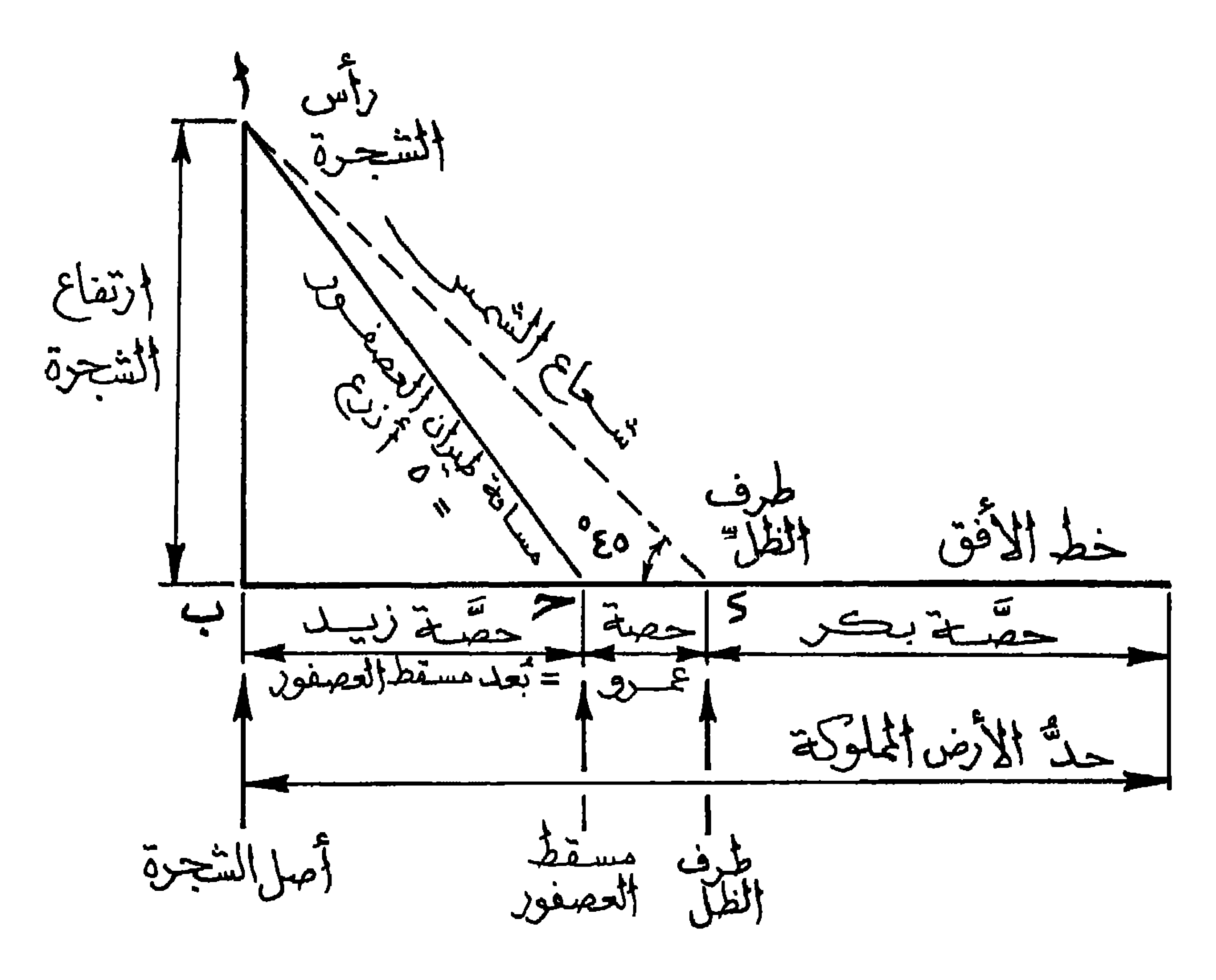
ولما كان السائل قد اشترط أن تكون الحصص أعدادًا صحيحة . لذلك فإنه بالرجوع إلى المثلث القائم أ ب حـ أن :

أ حـ = مسافة طيران العصفور = ٥ أذرع .

ب حـ = حصة زيد وهى مقدار مجهول ولكنه يُشرط أن يكون عددًا صحيحًا .

أ ب = ارتفاع الشجرة = طول الظل .

= مجموع حصتى زيد وعمرو وهو مقدار مجهول ولكنه عدد صحيح . لذلك لا بد أن تكون الأضلاع الثلاثة للمثلث أ ب حـ أعدادًا صحيحةً . وهذا لا يتأتى إلاَّ إذا كانت الأطوال حـب ، ب ا ، احـ تساوى ٣ ، ٤ ، ٥ أذرع على التوالى .=



شكل (١٩)
تحديد حصص من الأرض بشروط معينة

حيث إن مربّع الوتر ($٥^٢$=٢٥) يساوى مجموع مربّعى الضلعين الآخرين ($٤^٢$ + $٣^٢$ = ١٦ + ٩ = ٢٥) وبالتالى تكون الحصص على الوجه التالى :

حصة زيد = ٣ أذرع

حصة عمرو = ٤ – ٣ = ١ ذراع

حصة بكر = ٤ أذرع

ومن الواضح أنها كلها أعداد صحيحة كما اشترط السائل .

[٣] «فى معرفة ارتفاع المرتفعات من دون اسطرلاب :

تضع مرآةً على الأرضِ بحيثُ ترى رأسَ المرتفع فيها ، ثُمَّ تضربَ ما بين المرآة ومسقطِ حجره فى قدر قامتك ، وتقسمَ الحاصلَ على ما بين المرآةِ وموقفِك ، فالخارج ارتفاعُ المرتفعِ .

طريقٌ آخر :

تنصب مقياسًا فوق قامتك ودون المرتفع ، ثم تُبصرَ رأسها بخطٍّ شعاعى ، وتضربَ ما بين موقفِك ومسقطِ حجر المرتفع فى فَضْلِ المقياس على قامتك ، واقسم الحاصلَ على ما بين موقفِك وقاعدةِ المقياسِ ، وزد على الخارج قدرَ قامتك ، فالمجتمعُ قدرُ ارتفاعه » .

المسألة الثالثة :

الكشكول ـ طبعة مصر ـ صفحة ٢٣٣ (الجزء الثالث) .

فى هذا الموضع من « الكشكول » يورد العاملى طريقتين لتعيين ارتفاع المرتفعات دون الاستعانة بالأسطرلاب . يستخدم فى إحاهما مرآة تنعكس عليها صورة رأس المرتفع . بينما يستخدم فى الأخرى شاخصًا أو مقياسًا . ويتم الرصد بحيث يمر شعاع البصر على رأس المقياس ورأس المرتفع فى ذات الوقت . وقد سبق أن تناولنا هاتين الطريقتين بالشرح والتفصيل فى الفصل الثانى من الباب السابع من كتاب « خلاصة الحساب » .

[٤] «فى إجراء الماء من القنوات ، ومعرفةِ الموضعِ الذى يسيرُ فيه على وجهِ الأرضِ :

تقفَ على رأسِ البئر الأول . وتضعَ العَضادة على خط المشرق والمغرب . ويأخذُ شخصٌ قصبةً يساوى طولُها عمقَه ، ويبعد عنك فى الجهة التى تريدُ سَوْقَ الماءِ إليها ناصبًا للقصبةِ إلى أن ترى رأسَها من ثقبتى العضادةِ . فهناك يجرى الماءُ على وجه الأرض ، وإن بَعُدَت المسافةُ بحيث [لا][1] يرى رأس القصبة ، فاشعل فى رأسها سِراجًا . واعمل ما قلناه ليلاً .

ولوزن الأرض طرق عديدة أشهرها ما أورده صاحبُ النهايةِ . وعسانا نذكره فى هذا المجلدِ من الكشكولِ » .

المسألة الرابعة :
الكشكول ـ طبعة مصر ـ الصفحتان ٢٧٠ ، ٢٧١ (الجزء الثالث) .

(١) زيدت ليستقيم المعنى . ولا بد أنها سهو فى النسخ .

تعقيب :
سبق أن تعرّضنا لعملية وزن الأرض فى الفصل الأول من الباب السابع ، ويُستعان فى الطريقة المذكورة بعضادة الأسطرلاب فى عملية الرصد .

[٥] «إذا أردتَ إنشاءَ نهرٍ أو قناةٍ، وأردتَ أنْ تعرفَ صَعودَ مكانٍ على مكانٍ، وانخفاضَه عنه. فلَكَ فيه طرقٌ:

أحدُها أنْ تعمَلَ صفحةً من نُحاسٍ أو غيرِهِ من الأجسام الثَّقيلة، وتضَعَ على طرفيْها لَبنَتيْن كما فى عضادتى الاسطرلاب، وفى موضعِ العمودِ منها خيطٌ دقيقٌ فى طرفه ثُقَّالةٌ، فإذا أردت الوزْنَ أدخلت الصفحة فى خيطٍ طولُه خمسة عشر ذراعًا، ولتكن الصفحةُ فى طاقِ الوَسَطِ منه، وطرفاهُ على خشبتين طولُ كُلٍّ واحدةٍ خمسةُ أشبارٍ مُقوَّمتين غايةَ التقويم. بيد رجلين كل منهما فى جهة، والبعدُ بينهما بقدْرِ طولِ الخيطِ وأنت تنظُرُ فى لسانِ الميزانِ. فإذا انطبقَ على النَّجم، فالأرضُ معتدلةٌ. وإنْ مالَ فالمائِلُ عنها هى العليا، وتعرف كمية الزيادة فى العلو بأن تحُطَّ الخيط على رأسِ الخشبةِ إلى أنْ يطابقَ النجم واللسان، ومقدارُ ما نزل من الخيط هو الزيادةُ، ثمَّ تنقلَ إحدى رجْلى الميزان إلى الجهة التى تريد وزنها، وتثبتَ الأخرى إلى أن يتمَّ العملُ، وتحفَظَ مقدارَ الصُّعود بخيط على حدة، وكذا مقدارَ الهبوط. ثمَّ يلقى القليلُ من الكثيرِ، فالباقى هو تفاوُتُ المكانين فى الارتفاعِ، وإنْ تساويَا شَقَّ نقلُ الماء، وإن نزلت ما وقع إليها الثُّقل سَهُلَ ذلك، وإنْ عَلَت امتنع. وقد يُستغنى عن الصفحةِ بالأنبوبةِ التى يصبُّ فيها الماءُ من منتصِفها، فإنْ قطَرَ من طرفيها على السواء. أنبأ عن التعادُلِ، وإلاَّ عُمِلَ كما عُرِف.

المسألة الخامسة:

الكشكول ــ طبعة مصر ــ صفحة ٣١٧ (الجزء الثالث).

يذكر العاملى طريقة إيجاد فرق المنسوب (أى فرق الارتفاع) بين موضعين من الأرض باستخدام الصفيحة المثلثة، كذا باستخدام أنبوبة بها ماء. وقد شرحنا هذه الطريقة بالتفصيل فى الفصل الأول من الباب السابع من كتاب «خلاصة الحساب».

[٦] «إذا أردْنَا أنْ نعرفَ ارتفاعَ الشَّمسِ أبدًا من غير اسطرلاب ، ولا آلةِ ارتفاعٍ ، فإنَّا نقيمُ شاخصًا فى أرضٍ موزونةٍ ، ثمَّ نعلمَ على طرفِ الظلِّ فى ذلك الخطِّ ، ونمدَّ خطًّا مُستقيمًا من محلِّ قيامِ الشَّاخِصِ يمرر على طرفِ الظلِّ إلى مالا نهاية معينة له ، ثمَّ نُخرجَ من ذلك المحلِّ على خطِّ الظِلِّ فى ذلك السَّطح عمودًا طولُه مثلَ طولِ الشَّاخِصِ ، ثمَّ نمدَّ خطًّا مستقيمًا من طرفِ العمودِ الذى فى السَّطح إلى طرفِ الظلِّ ، فيحدُثَ سطحُ مثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ ، ثم نجعل طرفَ الظِلِّ مرْكزًا ، ونديرُ عليه دائرةً بأى قدْرٍ شئنا . ونُقسِّمَ الدائرةَ بأربعةِ أقسامٍ متساويةٍ على زوايا قائمةٍ يجمعُها المركز ، ونقسم الربع الذى قطعه المثلَّثُ من الدائرة بتسعين جزءًا مما قطعه الضلعُ الذى يوتر الزاوية القائمة من الدائرةِ مما يلى الخط والظل هو الارتفاع .

وليكن محلَّ الشاخص نقطةُ (ا) وطرفَ الظِلِّ (ب) والخطُّ المُخرَجَ (اح) والعمودَ فى السطح (اد) و (أ) هى الزاويةِ القائمة والمستقيم الواصل بين طرفِ العمودِ وطرفِ الظلِّ (دب) ، والمثلث (اب د) . ومركز الدائرة (ب) . والدائرة (ى رح ٥) ، والربع المقسوم بتسعين (ى ر) ، والضلع الموتَّر للزاوية القائمة من المثلث ضلع (ب د) ، فإذا كان قاطعًا للرُّبْعِ على نقطة (ك) كانت قوس (ى ك) مقدارَ الارتفاعِ فى ذلك الوقتِ من ذلك اليومِ .

وهذا مما بُرهنَ عليه ، لكنَّ برهانَه مما يطولُ ، ولا يتَّسِعُ له الكشكولُ » .

المسألة السادسة :
الكشكول ــ طبعة مصر ــ الصفحتان ٣٢٩ . ٣٣٠ (الجزء الثالث) . وقد صَحَّحنا التحريف فى الرموز الواردة فى المتن .

شرح المسألة السادسة : يقدم العاملى هنا طريقةً لتعيين ارتفاع الشمس بغير استخدام للاسطرلاب أو لآلة ارتفاع . وتتلخص الطريقة فى إقامة شاخص على أرض تامة الإستواء ثم تحديد طرف الظل . ويبين شكل (٢٠) تكوُّنَ مثلث قائم الزاوية عند الشاخص ، نعلم منه ارتفاع الشاخص وطول ظلِّه . وبالتالى فإنَّ زاوية ميل شعاع =

شكل (٢٠)

طريقة لتعيين ارتفاع الشمس دون اسطرلاب أو آلة ارتفاع

الشمس تتخذ قيمة محدّدة ، ويرمى العاملى إلى نقل المثلث القائم من المستوى الرأسى (الشاقولى) إلى المستوى الأفقى حيث يمكن قياس الزاوية المطلوبة ، وطريقة النقل هذه واضحة تمامًا فى المتن بعد تصحيحنا للتحريف الذى ورد فى الرموز .

ويتضح من شكل (٢٠) أن المثلث المرسوم فى المستوى الأفقى ابـد هو نفسه المثلث المكوّن من الشاخص وظِلّه وشعاع الشمس فى المستوى الرأسى . وبذلك تكون زاوية ميل الشعاع الشمسى عند ب موجودة فى المثلث المُنشأ على الأرض . ومن ثمّ يمكن قياسها . وبالتالى يتحدد ارتفاع الشمس ساعة القياس ، والبرهان على صِحّة ذلك واضح تمامًا من الشكل حيث إن المثلثين القائمين فى المستويين الرأسى والأفقى متطابقين تمام التطابق بتساوى الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة .

خلاصـــة

يُقدِّم لنا الشيخ بهاء الدين العاملى ـ العالِمُ الموسوعىُّ العربى ـ صورة واضحة ودقيقة لمعارف العرب الرياضية فى حوالى نهاية القرن السادس عشر للميلاد وأوائل القرن السابع عشر إبَّان انتقال قصب السَّبْق من الحضارة العربية إلى الحضارة الغربية . وقد ضمَّن العاملى هذه المعارفَ بعضَ قواعد وطرائق من ابتكاره . ولقد نجح فى عرضه لموضوع الرياضيات هذا عرضًا غاية فى الترتيب والشمول لاسيما وأنه جاب الأمصار العربية والإسلامية واطلع على كثير من أعمال علمائها زهاء ثلاثين عامًا . فجاءت كتاباته مشتملة على ما ألمّ به وأحاط فى سياحاته واطلاعاته المترامية .

ويجدر بنا فى ختام هذه الدراسة التى تناولت تحقيق كتاب «خلاصة الحساب» و «الكشكول» ، ودراسة رياضيَّاتهما دراسة تحليلية ، أن نقدم خلاصة موجزة لما أورده العاملى فى هذين المُصنَّفين . ويشمل استخراج المجهولات بالطرق الحسابية . كما يضم خواص الأعداد ، وجمع المتواليات ، واستخراج المجهولات بطريق الجبر والمقابلة . كذا بعض المسائل العويصة والمستحيلة الحل . وتتضمن كتابات العاملى كذلك إيجاد مساحة الأشكال الهندسية المستوية وحجوم الأجسام المنتظمة . وبعض المسائل التى تعْرِضُ فى أعمال المساحة العملية .

أولا : الطرق الحسابية الأساسية

١ ـ قواعد حساب الأعداد الصحيحة (الصِّحاح) من جمع وطرح وضرب وقسمة . مع بيان طرق الضرب المختلفة كطريقة الشبكة على سبيل المثال .

٢ ـ قواعد حساب الكسور من جمع وطرح وضرب وقسمة مع بيان تجنيس الكسور (توحيد المخارج أو المقامات) ورفعها .

٣ ـ ميزان العدد ، أى طريقة امتحان صحة العمليات الحسابية المختلفة . وتُعرف هذه الطريقة بالقاعدة الذهبية ، وتُطلق تسمية الميزان على ما يبقى

من العدد أو من حاصل الجمع أو الطرح أو الضرب بعد إسقاطه تسعة تسعة .

٤ ـ طريقة إيجاد الجذر للعدد الصحيح وللكسر ، وقد ذكر العاملى طريقةً مبتكرة لحساب جذر الأصمّ بالتقريب ، وتؤدى هذه الطريقة إلى نتائج لا يتعدّى الخطأ فيها ١٪ ، وقد سبق للكرخى[١] أن ضمّنها كتابه «كافى الحساب» .

٥ ـ استخراج المجهولات بطريق الحساب ، وتشمل الطرق التالية :

(أ) استخراج المجهولات بالأربعة المتناسبة ، وبالأربعة المتناسبة يقصد أربعة مقادير $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ، $ع_٤$ بحيث تكون نسبة الأول إلى الثانى كنسبة الثالث إلى الرابع ، أى أن :

$$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ع_٣}{ع_٤}$$

ويُسمى المقداران $ع_١$ ، $ع_٤$ الطرفين . بينما يُسمىّ المقداران $ع_٢$ ، $ع_٣$ الوسطين . ومن الواضح أن حاصل ضرب الطرفين يساوى حاصل ضرب الوسطين . وبمعلومية ثلاثة من هذه المقادير الأربعة يمكن حساب المقدار المجهول باستخدام معادلة التناسب فى أى من صورها المترادفة .

(ب) استخراج المجهولات بطريق حساب الخطأين

وقد كانت هذه الطريقة معروفة تمامًا ومنتشرة الاستعمال فى صدر الحضارة العربية ، وتعتمد هذه الطريقة على فرض قيمتين مختلفتين للمقدار المجهول ثم إيجاد الخطأين الناشئين عن هذين المفروضين .

---

(١) هو فخر الدين أبو بكر محمد بن الحسن الكرخى الحاسب وزير بهاء الدولة . صاحب كتابى «الفخرى» و «القافى» . وقد ألّفها بين سنتى ٤٠١ ، ٤٠٧هـ (١٠١٠ ـ ١٠١٦م) .

والتعويض فى علاقة محددة لتخرج القيمة الصحيحة للمقدار المجهول .

(جـ) استخراج المجهولات بالعمل بالعكس

وفى هذه الطريقة يبدأ حل المسألة من نهايتها حيث تجرى الخطوات بعكس ما يرد فى متن المسألة حتى نصل بالتسلسل إلى قيمة المجهول .

٦ ـ كيفية استخراج الأسماء أو الشهور أو البروج المُضْمرةَ ، وذلك بتجميع معلومات من المُضمِر تؤدى إلى معادلة بسيطة ذات مجهول واحد . وبذلك يتحدد العددُ الممثّلُ للشىء المُضمَرِ .

٧ ـ فكرة التباديل والتوافيق كإيجاد عدد الكلمات التى تتركب من حروف الهجاء (حروف المعجم) بشروط خاصة ، كأن تكون الكلمة ثنائية ، أو أن تكون الكلمة ثلاثية بشرط عدم اجتماع حرفين من جنس فيها . وهكذا .

٨ ـ قسمة مال غير واف بحقوق متفاوتة على حسب التفاوت ، أى بيان كيفية تقسيم مال موجود على جماعة من المستحقين تزيد استحقاقاتهم أو ديونهم على المال الموجود .

ثانيًا : خواص الأعداد

١ ـ تعريف العدد عمومًا ، كذا تعريف الأعداد المتماثلة والمتداخلة والمتوافقة والمتباينة .

٢ ـ الأعداد التامة والزائدة والناقصة ، والعددُ التامُّ هو ذلك العدد الذى يساوى مجموع الأعداد المكوِّنة له ، وينتهى العدد التام دومًا بواحد فقط من أىٍّ من الرقمين ٦ ، ٨ فى خانة الآحاد .

وهنا يشير العاملى إلى قاعدة تختصُّ بتعيين الأعداد التامة ، وهى قاعدة

ثبتت صحتها حتى البلايين على الأقل . وقد أمكن باستخدام هذه القاعدة تعيين الأعداد التامة السبعة الأولى .

٣ ـ بيان المقصود بالأعداد المتحابّة كالعددين ٢٢٠ ، ٢٨٤ حيث إن مجموع عوامل كل منهما يساوى مجموع عوامل الآخر ، ويُقصد بعوامل العدد هنا جميع الأعداد التى يقبل القسمة عليها بدءًا من الواحد الصحيح .

٤ ـ ربط العاملى بين صفات آدم وحواء وبين خواص الأعداد .

ثالثًا : جمع المتواليات

قدم العاملى طرق إيجاد مجموع بعض المتواليات الرياضية نذكرها فيما يلى :

١ ـ جمع الأعداد على النظم الطبيعى ، أى جمع المتوالية الحسابية التى أساسها الواحد ، أى التى يزيد فيها كل حدٍّ عن سابقه بواحد صحيح :

(١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ن) = ن/٢ (ن + ١)

٢ ـ مضروب عدد فى نفسه وفى جميع ما تحته من الأعداد :

ن [ن + (ن − ١) + (ن − ٢) + ... + ٣ + ٢ + ١]
= ن²/٢ (ن + ١)

٣ ـ جمع الأفراد (دون الأزواج) على النظم الطبيعى ، أى جمع الأعداد المفردة حسب تسلسلها الطبيعى :

[١ + ٣ + ٥ + ٧ + ... + (ن − ٢) + ن] = ((ن + ١)/٢)²

٤ ـ جمع الأزواج (دون الأفراد) على النظم الطبيعى ، أى جمع الأعداد الزوجية حسب تسلسلها الطبيعى :

$$[٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + (ن - ٢) + ن] = \frac{ن}{٢} (\frac{ن}{٢} + ١)$$

٥ ـ جمع المُربَّعات المتوالية :

$$[١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ... + ن^٢] =$$

$$\frac{ن (ن + ١) (٢ ن + ١)}{١ \times ٢ \times ٣}$$

٦ ـ جمع المُكعَّبات المتوالية :

$$[١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣ + ... + ن^٣] = \left[\frac{ن (ن + ١)}{٢}\right]^٢$$

٧ ـ أشار العاملى إلى الأعداد المتوالية من الواحد على التضاعف ، أى جمع المتوالية الهندسية التى أساسها ٢ ، وهى :

(١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ...)

أى $(١ + ٢ + ٢^٢ + ٢^٣ + ٢^٤ + ٢^٥ + ...)$

وفيها يكون كلُّ حدٍّ فى المتوالية مُساويًا للحد الذى يسبقه مضروبًا فى ٢ ، وقد أشار العاملى إلى هذه المتوالية الهندسية فى معرض حديثه عن الأعداد التامة .

هذا وقد سبق لأبى الريحان البيرونى (٩٧٣ – ١٠٥١ م) أن توصَّل إلى إيجاد مجموع هذه المتوالية ، التى تُعرف بالنسبة الشطرنجية عطفًا على قصة الحكيم الذى طلب مكافأته من الحاكم بحيث تساوى مجموع ما يتحصل من وضع حبوب على مربعات رقعة الشطرنج بحيث تبدأ بحبة واحدة فى المربع الأول ثم تُزاد على التضاعف فى المربعات التالية حتى المربع الرابع والستين وهو المربع الأخير فى رقعة الشطرنج ، ويبلغ مقدار

الحَبِّ المتحصل على رقعة الشطرنج ـ حسب المتوالية الهندسية التى أساسها ٢ ـ رقمًا بالِغَ العِظَم سبق أن حسبه العلماء العرب[١] وهو :

١٨ ٤٤٦ ٧٤٤ ٠٧٣ ٧٠٩ ٥٥١ ٦١٥

رابعًا : الجبر والمقابلة

١ ـ تعريف الشىء والمال والكعب ومراتبها . وهذه نُعَبِّر عنها بالرموز الرياضية المعاصرة على الوجه التالى : س ، س٢ ، س٣ وما فوقها . أما العدد فهو الذى لا يشتمل على الشىء أو المجهول .

٢ ـ بيان المقصود بكلمتى « جبر » و « مقابلة » حيث يُعبِّر العاملى عن معنيهما تعبيرًا دقيقًا فى الفصل الثانى من الباب الثامن من كتابه « خلاصة الحساب » حيث يقول بلفظه :

« الطرف ذو الاستثناء[٢] يُكمَّلُ ، ويُزادُ مثل ذلك على الآخر ، وهو الجبر » .

« والأجناسُ المتجانسةُ المتساويةُ فى الطرفين تُسقطُ منهما ، وهو المقَابلةُ . »

٣ ـ حل المسائل الجبرية الستّ ، أى حل معادلة الدرجة الثانية فى صورها الستّ ، وهى ثلاث مسائل تُسمىّ المفردات . وثلاث أُخر تُسمىّ المُقترنات ، وهى لا تخرج فى مجموعها عن جبر محمد بن موسى الخوارزمى .

---

(١) راجع على سبيل المثال كتاب « مُرشدة الطالب إلى أسى المطالب » للشيخ عبد الله العجمى الشنشورى . مخطوط المكتبة الأحمدية بحلب ـ رقم ١٢٤٢ : صفحة ٢٥ أ حتى ٢٦ ب .

(٢) يقصدُ الحدّ الذى تسبقه إشارةٌ سالبة . فيُضاف مثلُ هذا الحدّ نفسِه ولكن بإشارة موجبةٍ لكلٍّ من طرف المعادلة .

(ا) المفردات : وهى مسائل «المعادلة بين جنس وجنس» :

١ ـ عدد يعدل أشياء : جـ = ب س

٢ ـ أشياء تعدل أموالاً : ب س = أ س^{٢}

٣ ـ عدد يعدل أموالاً : جـ = أ س^{٢}

(ب) المُقترنات : وهى مسائل «المعادلة بين جنس وجنسين» . وفيها يكون جنس فى أحد طرفى المعادلة يعدل جنسين (مقترنين) لهما نفس الإشارة الجبرية فى الطرف الآخر من المعادلة :

١ ـ عدد يعدل أشياء وأموالاً : حـ = ب س + أ س^{٢}

٢ ـ أشياء تعدل عددًا وأموالاً : ب س = حـ + أ س^{٢}

٣ ـ أموال تعدل عددًا وأشياء : أ س^{٢} = حـ + ب س

وقد أورد العاملى أمثلةً عديدة تطبيقًا على الحلول التى قدّمها لهذه المسائل الجبرية الستّ .

٤ ـ تحويل الفرق بين مُربَّعى مقدارين إلى حاصل ضرب مجموع المقدارين فى الفرق بينهما :

(م^{٢} − ن^{٢}) = (م + ن) (م − ن)

٥ ـ «المسائل السيَّالة» وهى تسمية أطلقها العرب على المسائل التى ليست لها إجابة وحيدة ، أى المسائل التى يصحُّ لها عدد غير محدود من الحلول الممكنة . وقد أعطى العاملى مثالاً لذلك توصَّل فيه إلى تعيين النسبة بين المجهولين ، وبالتالى يصير لهذه المسألة عدد لا نهائى من الأجوبة الصحيحة كلُّها تحقق النسبة التى تمَّ تعيينها .

خامسًا : المسائل العويصة أو المستحيلة الحل

ساق العاملى فى خاتمة كتابه «خلاصة الحساب» سبع مسائل أسماها «المستصعبات السبع» ، وترجع الصعوبة أو الاستحالة فى حلها إلى وقوعها فى واحدة من المسائل الآتية :

١ ـ مُستصعبة تؤول المسألة فيها إلى مواجهة معادلة من الدرجة الثالثة ، وهذه ليست هينة الحل كمعادلة الدرجة الثانية ، وقد سبق لبعض علماء العرب محاولة حل معادلة الدرجة الثالثة بالطرق الهندسية بواسطة قطوع المخروط . ومن أمثال من تصدّى لهذه المعادلة بالحل أبو عبد الله محمد عيسى الماهانى ، وثابت بن قرة الحرانى ، وأبو جعفر الخازن الخرسانى ، والحسن ابن الهيثم ، وغياث الدين عمر بن إبراهيم الخيامى .

٢ ـ مُستصعبة تؤدى إلى معادلة من الدرجة الرابعة ، وقد سبق لأبى الوفاء البوزجانى أن توصَّل إلى حلول ـ بطرق هندسية ـ لبعض حالات من هذه المعادلة ، كذلك تضمَّنت مؤلفات عمر الخيامى معادلة من الدرجة الرابعة مع بيان حلِّها .

٣ ـ استحالة تقسيم ضعف المربع إلى مربعين ، أى استحالة حل المعادلة :

$$٢ن^{٢} = ن_{١}^{٢} + ن_{٢}^{٢}$$

بشرط أن يكون كلٌّ من ن ، $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ عددًا صحيحًا ، وهذه المسألة المستحيلة الحل سبْقٌ على ما عُرِف فيما بعد بنظرية «فيرما» نِسْبةً إلى العالِم الرياضى الفرنسى فيرما (١٦٠١ ـ ١٦٦٥ م) .

٤ ـ استحالة تقسيم مكعب بقسمين مكعبين ، أى استحالة حل المعادلة :

$ن^{٣} = ن_{١}^{٣} + ن_{٢}^{٣}$ حيث ن ، $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ أعداد صحيحة

وقد كانت هذه المسألة المستحيلة الحل معروفة عند عمر الخيامى ، وقد

يكون قد وقف عليها علماء عرب من قبله ، فهذه المستصعبة سبق آخر على ما ورد أيضًا فى نظرية بيير دى فيرما التى جاءت بعد وفاة العاملى بخمسة عشر عامًا ، والتى تقول :

«من المحال تقسيم المكعب إلى مكعبين ، أو ضعف المربع إلى مربعين ، أو بوجه عام تقسيم أية قوة أعلى من المربع إلى قوتين من نفس الدرجة .»

سادسًا : تعيين المساحات والحجوم

١ ـ تعيين مساحات الأشكال الهندسية المستوية ذات الأضلاع المستقيمة والمقوَّسة .

٢ ـ حساب حجوم الأجسام الهندسية المنتظمة ذات الأسطح المستوية والأسطوانية والكرية .

سابعًا : أعمال المساحة العملية

١ ـ تحديد حصص من الأرض فى ضوء معلومات مُعطاه ، مع استيفاء شروط معينة .

٢ ـ طرق قياس فرق المنسوب (أى فرق الارتفاع) عند موضعين من سطح الأرض (ويسميها العاملى عملية وزن الأرض) بقصد شق القنوات .

٣ ـ الطرق المختلفة لتعيين علو المرتفعات وأعماق الآبار .

٤ ـ قياس عروض الأنهار .

٥ ـ تعيين ارتفاع الشمس بغير الاستعانة بالاسطرلاب أو بآلة ارتفاع .

هذه نظرة فاحصة جامعة لما ضَمَّنَه العالمُ العربى الموسوعى بهاء الدين العاملى لكتابيه «خلاصة الحساب» و «الكشكول» من رياضيات . عَرضَ فيها لمعارف

العرب على عهده ، وقد جاب كثيرًا من الأمصار العربية والإسلامية ، ووقف على أعمال الكثيرين ممن تقدّمه من العلماء والفلاسفة . فلا غرو أن يطلع علينا بعرض شامل تمام الشمول ، مرتب غاية الترتيب ، دقيق كل الدقة ، مُمثلٌ أصدق تمثيل لما ألمَّ العرب به وأحاطوا فى مجال الحساب والجبر والمساحة فى نهاية القرن السادس عشر وبداية القرن السابع عشر للميلاد ، غداة انتقال الصدارة فى التقدم الحضارى من الشرق إلى الغرب . وعرض العاملى هذا غنى بأوجه سبق العرب فى الرياضيات ، عامر ملىء بفضلهم فيها ، وما يدرسُ عالِمٌ أعمالَ العربِ ويتعمقُ ، ويخوضْ فيها ويتمعّنُ ، إلاّ ويخرجُ من دراسةٍ جادةٍ مُنصفةٍ إلى أنَّ رياضيات العرب هى ـ ولا شك ـ الأساس الذى عليه قامت الرياضيات الحديثة .

فهـرس الأشـــكال